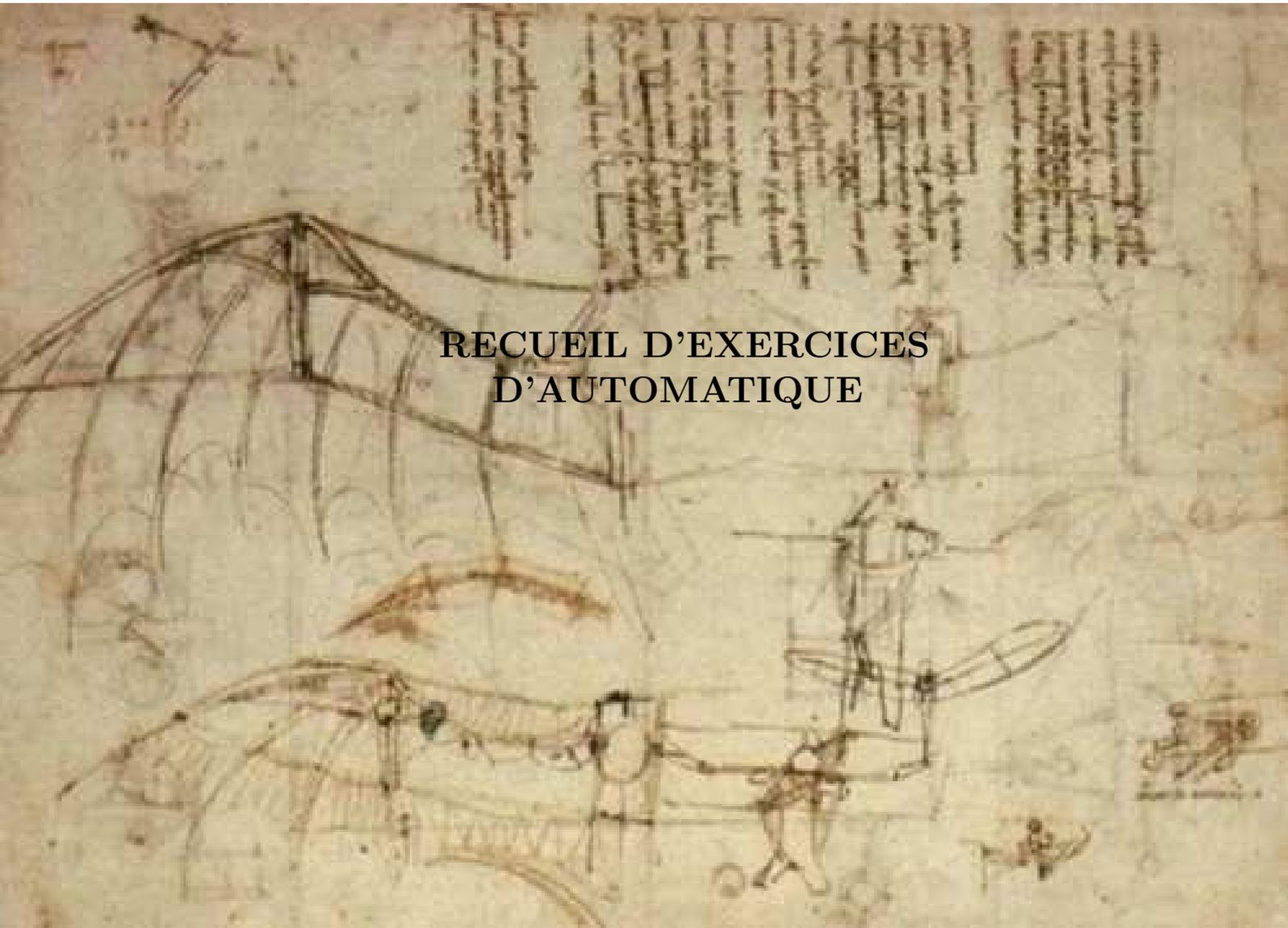


ÉCOLE D'OFFICIERS DE L'ARMÉE DE L'AIR

DÉPARTEMENT DES VÉHICULES AÉROSPATIAUX



**RECUEIL D'EXERCICES
D'AUTOMATIQUE**

Monsieur BATEMAN
Commandant HEIM

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
I EXERCICES D'APPLICATION	3
1 Analyse d'un système du premier ordre	5
2 Analyse d'un système du second ordre	7
3 Marges de stabilité	9
4 Précision	11
5 Précision Vs. Stabilité	13
6 Lieu d'Evans	17
7 Correction proportionnelle	19
8 Correction proportionnelle dérivée	21
9 Correction proportionnelle intégrale	23
10 Représentation d'état d'un système	25
11 Commandabilité et Observabilité d'un système	27
12 Commande modale	29
13 Observateurs déterministes	31

II BUREAUX D'ÉTUDES	35
1 Modélisation d'une cuve	37
2 Étude d'un quadrirotor	41
3 Régulateur de distance d'une voiture	47
4 Étude d'une automanette	51
III TRAVAUX DIRIGÉS ASSISTÉS PAR ORDINATEUR	55
1 Initiation à MATLAB	57
2 Systèmes d'ordre un et deux	65
3 Etude d'un quadrirotor	69
4 Dynamique latérale d'un Boeing 747	75
5 Étude d'une automanette	81
6 Estimation de position d'un satellite par filtrage de Kalman	85
7 Commande d'un quadrirotor	89
8 Étude d'un moteur brushless	95
9 Tenue d'altitude d'un quadrirotor	101
10 Commande par retour d'état de la dynamique latérale d'un airliner	105
11 Observateur déterministe : application à l'estimation de cap	111
12 Filtre de Kalman : Application à l'estimation de trajectoires	117
IV ARCHIVES	123
1 Asservissement d'un avion en roulis	125
2 Contrôle de la trajectoire d'un avion	131
3 Guidage d'un missile	135

Introduction

Ce recueil d'exercices d'automatique illustrent les cours de méthodes fréquentielles. Il est articulé en quatre parties qui comportent :

- Une série de petits exercices reprenant chacune des notions abordée en cours.
- Des bureaux d'études qui traitent de problèmes d'automatique appliqués à des systèmes aéronautiques et spatiaux et qui seront abordés lors des séances de travaux dirigés.
- Les sujets des bureaux d'études qui traitent de système aéronautique et spatiaux et qui seront simulés avec le logiciel `MATLAB` lors des séances de travaux dirigés assistés par ordinateur.

Première partie

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1

Analyse d'un système du premier ordre

On étudie le comportement d'une voiture roulant sur le plat en ligne droite. On commande cette voiture par le pourcentage d'enfoncement de la pédale d'accélérateur et on observe sa vitesse.

Initialement, la pédale est enfoncée de 40% et on roule à 100km/h .

A un instant que l'on prendra comme origine des temps, on appuie sur la pédale de 15%. L'évolution de la vitesse est représentée par la figure 1.1

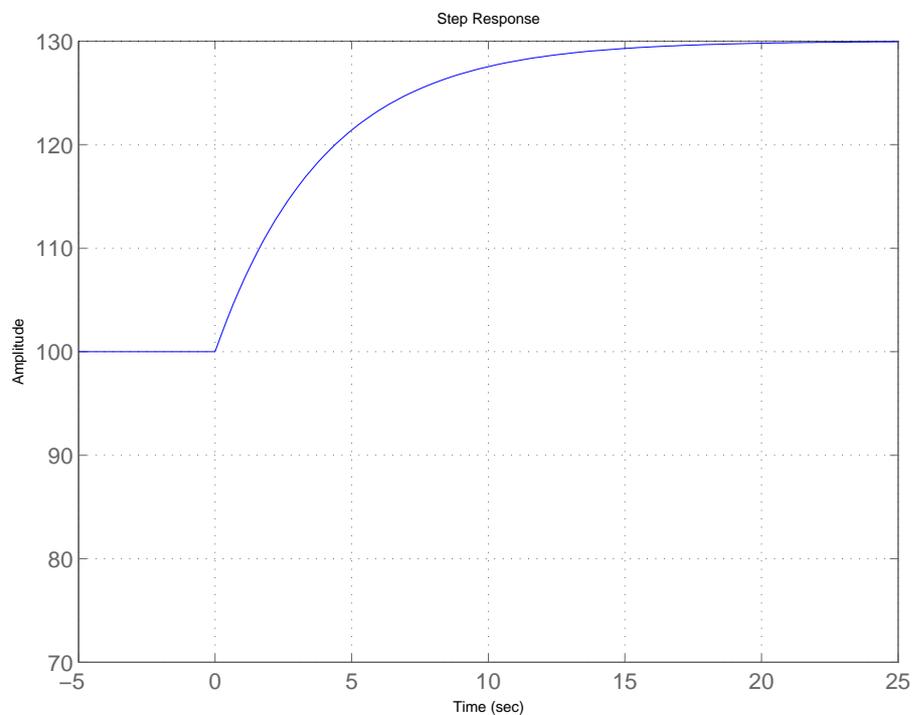


Figure 1.1 – Evolution de la vitesse à un appui de 15% de l'accélérateur

Exercice 1. Analyse d'un système du premier ordre

Question 1 : *Quelles seront les grandeurs qui serviront d'entrée et de sortie au système modélisant ce problème.*

Question 2 : *Quel est l'ordre de ce système ? Identifier ses paramètres.*

Question 3 : *Tracer le diagramme de Bode*

Question 4 : *Calculer la fréquence de coupure f_c en Hz. On suppose que l'on appuie et relâche la pédale selon une loi sinusoïdale d'amplitude 15% et de période T .*

Décrire le comportement de la voiture pour $T_1 = 240s$ puis pour $T_2 = 2,4s$

EXERCICE 2

Analyse d'un système du second ordre

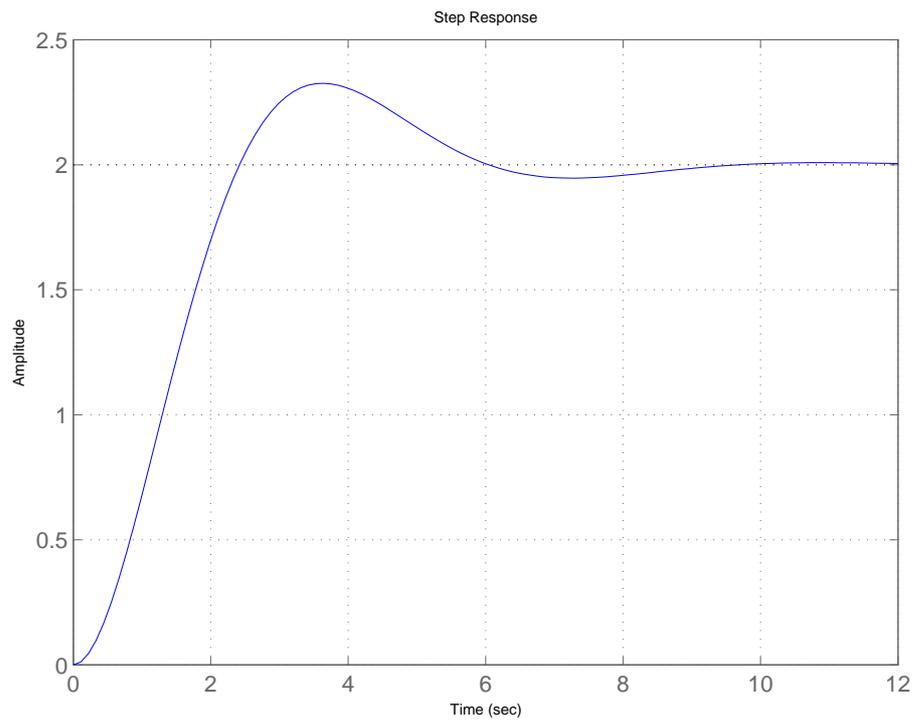


Figure 2.1 – Réponse indicielle unitaire

Question 1 : *Exploiter la figure représentant la réponse indicielle unitaire d'un système pour en déterminer les caractéristiques :*

- *Ordre du système*
- *Gain statique*
- *Temps de réponse à 5%*

Exercice 2. Analyse d'un système du second ordre

— Dépassement en %

Question 2 : En déduire l'amortissement réduit, la pulsation propre non amortie et écrire la fonction de transfert.

Question 3 : Calculer les pôles du système et les placer dans le plan complexe.

Question 4 : Calculer le facteur de surtension et la pulsation de résonance

Question 5 : Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode et de Black (on fera apparaître la résonance)

EXERCICE 3

Marges de stabilité

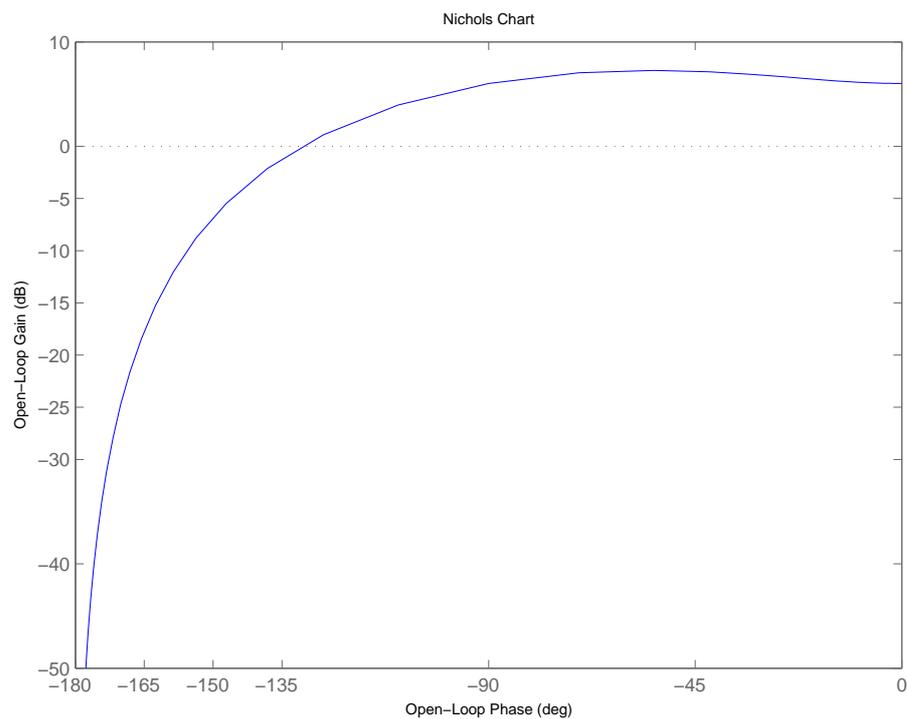


Figure 3.1 – Lieu de Black de $H(j\omega)$

La figure 3.1 est le lieu de Black du système de fonction de transfert $H(p)$ en boucle ouverte. On insère $H(p)$ dans une boucle de régulation à retour unitaire. Le correcteur est de type proportionnel $C(p) = K$

Exercice 3. Marges de stabilité

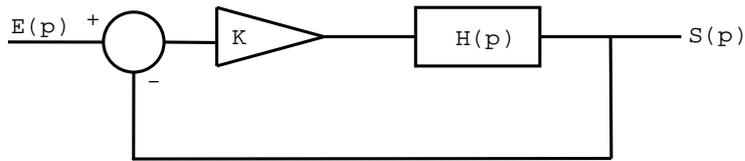


Figure 3.2 – Asservissement en boucle fermée

Question 1 :

Le système en boucle fermée est-il stable ?

Si oui, quelles sont les marges de gain et de phase ?

Question 2 : *Quel gain faut-il choisir pour obtenir une marge de phase $M_\varphi = 20^\circ$?*

Question 3 : *Quelle marge de phase M_φ obtient-on si on choisit un gain de 30dB ?*

EXERCICE 4

Précision

Le but de cet exercice est de pratiquer le calcul des erreurs en régime permanent.

On ne considérera que des entrées (consignes E ou perturbation B) en échelon d'amplitude respectivement e_0 et b_0 .

Dans tout l'exercice on notera ε_E l'erreur de suivi de la consigne à perturbation nulle et ε_B l'erreur de régulation en présence de perturbation.

Question 1 : Calculer $\varepsilon_{E\infty}$ et $\varepsilon_{B\infty}$ pour $C(p) = K$ et $H(p) = \frac{1}{p^2 + p + 4}$

Question 2 : Mêmes questions pour $C(p) = K$ et $H(p) = \frac{1}{p(1 + 3p)}$

Question 3 : Mêmes questions pour $C(p) = \frac{K}{p}$ et $H(p) = \frac{1}{1 + 3p}$

Question 4 : Comparez les deux derniers cas.

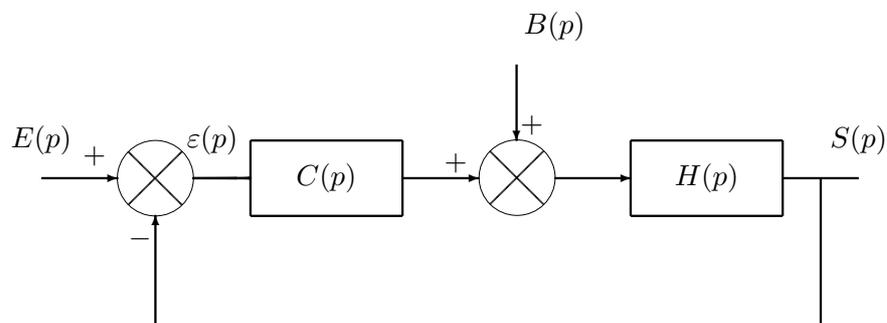


Figure 4.1 – Le système bouclé

EXERCICE 5

Précision Vs. Stabilité

On insère un système de fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{2p^2 + 3p + 1}$ dans une boucle d'asservissement avec un correcteur de type proportionnel.

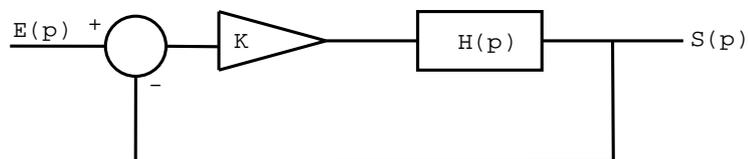


Figure 5.1 – Asservissement en boucle fermée

La figure 5.2 représente le lieu de Black de $H(p)$

Exercice 5. Précision Vs. Stabilité

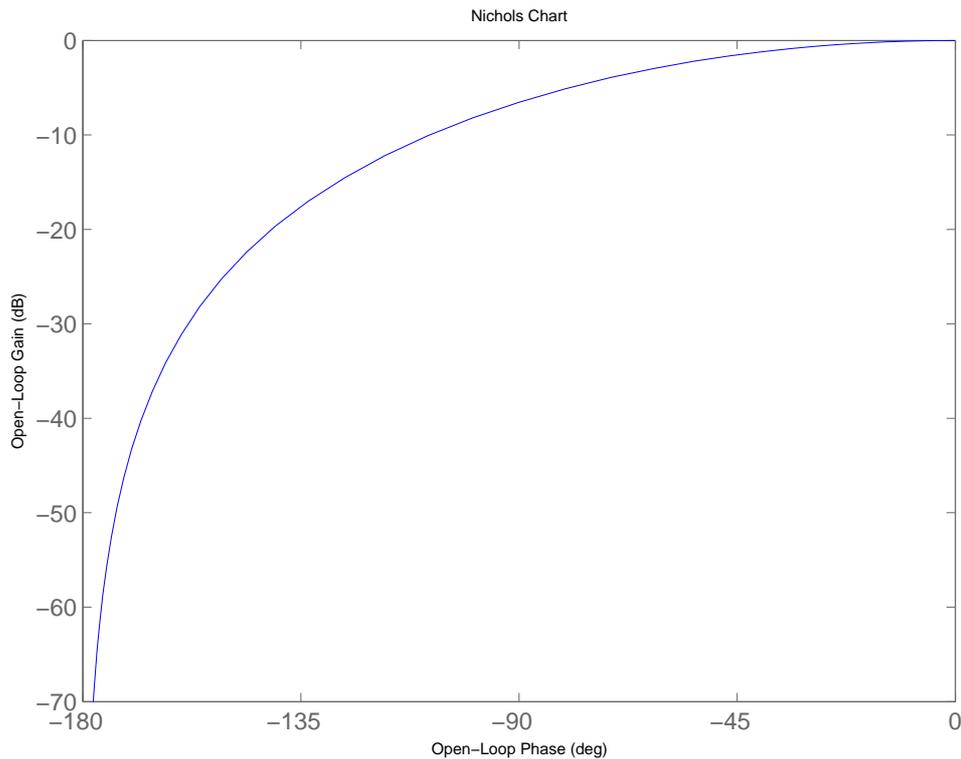


Figure 5.2 – Lieu de Black

Question 1 : Calculez en fonction de K l'erreur en régime permanent pour une consigne en échelon unitaire.

Calculez cette erreur pour $K = 1$ et relevez graphiquement les marges de stabilité dans ce cas.

Question 2 : Calculez le gain qui permette de réduire l'erreur à 5%

Déterminez les nouvelles marges de stabilité avec ce gain.

Question 3 : Pour $K = 1$, calculez le gain statique en boucle fermée à partir de l'erreur calculée à la question 1.

Retrouvez ce résultat sur les abaques de Nichols et déterminez si le système en boucle fermée est résonant. Que peut-on alors dire du facteur d'amortissement réduit? En déduire l'allure de la réponse à un échelon unitaire.

La figure 5.3 redonne le lieu de la boucle ouverte non corrigée ($K = 1$) ainsi que celui de la boucle ouverte corrigée avec le gain déterminé à la question 2. On a aussi fait apparaître les abaques de Nichols.

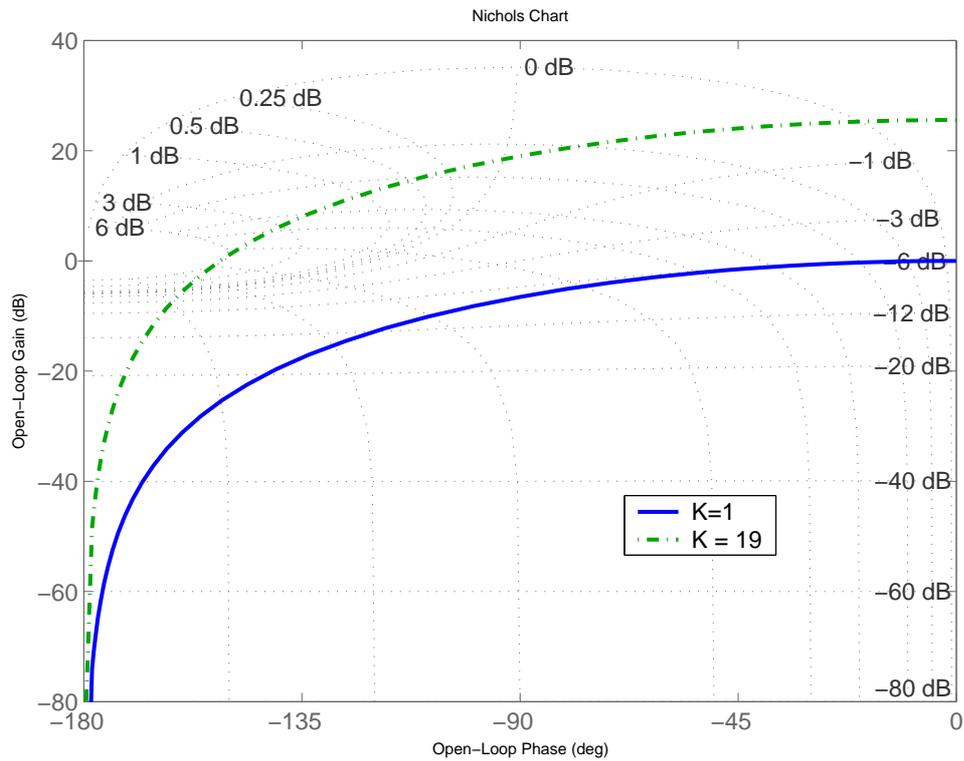


Figure 5.3 – Lieux de Black et abaques de Nichols

Question 4 : Pour $K = 19$, calculez le gain statique en boucle fermée à partir de l'erreur calculée à la question 2.

Relevez sur les abaques de Nichols si le système est résonant en boucle fermée et déterminez le cas échéant son facteur de surtension. En déduire alors le facteur d'amortissement réduit et le dépassement relatif pour une entrée en échelon. En déduire l'allure de la réponse à un échelon unitaire.

Exercice 5. Précision Vs. Stabilité

EXERCICE 6

Lieu d'Evans

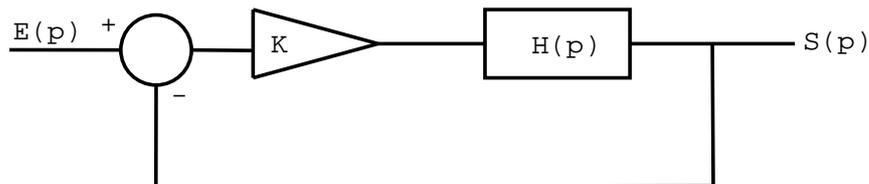


Figure 6.1 – Système en boucle fermée

Question 1 : Tracez le lieu d'Evans pour $H(p) = \frac{p+3}{p^3+7p^2+12p+10}$ pour $K > 0$

Question 2 : Exploitation du lieu d'Evans :

- Indiquez sans calcul la marge de gain du circuit en boucle fermée,
- Quel est le comportement dominant du système en boucle fermée
- Décrire qualitativement la réponse indicielle en boucle fermée quand $K \rightarrow \infty$?

Question 3 : Tracez le lieu d'Evans pour $H(p) = \frac{-1}{p^3+6p^2+13p+20}$ et $K > 0$

Question 4 : Tracer la carte des pôles et décrire qualitativement le comportement du système en boucle fermée pour des valeurs petites, moyennes et élevées de K

EXERCICE 7

Correction proportionnelle

On cherche à commander par un correcteur à simple gain C un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée sur le diagramme de Black (Figure 7.1). Le système est à retour unitaire.

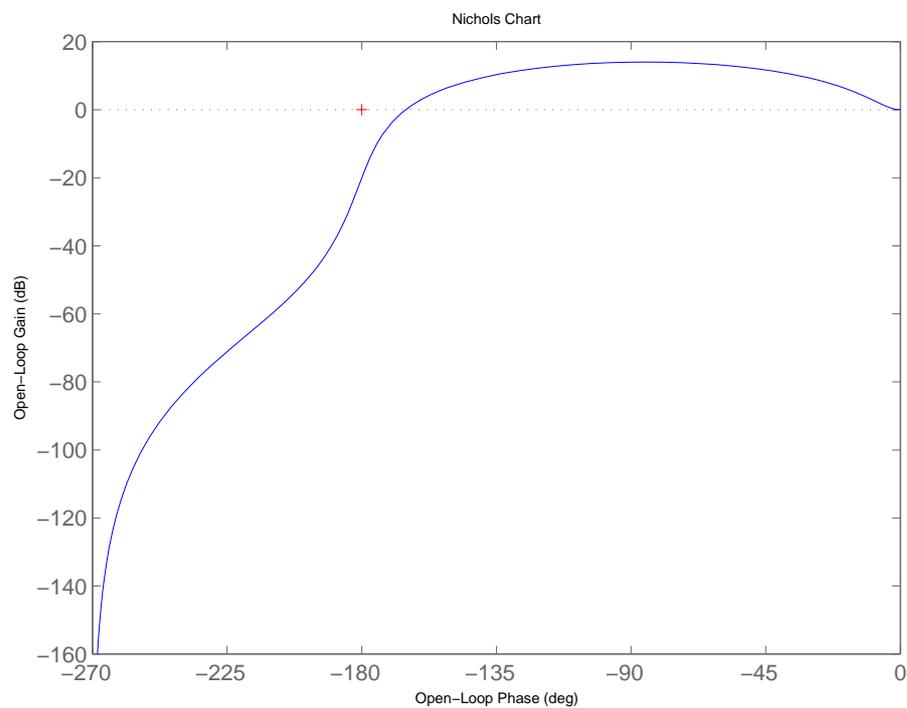


Figure 7.1 – Lieu de Black de $H(j\omega)$

Question 1 : *Dessinez le schéma du système corrigé en boucle fermée.*

Exercice 7. Correction proportionnelle

Question 2 : *Quelle est la valeur du gain statique de $H(p)$? Quelle est la classe du système ? En déduire la valeur de la sortie en régime permanent pour une entrée de consigne en échelon unitaire $e_0 = 1$ si on prend un gain $K_1 = 1$.*

Question 3 : *Que valent les marges de gain et de phase ?*

Question 4 : *Calculez le gain K_2 qu'il faut choisir pour assurer une marge de phase de 45° .*

Question 5 : *Tracez sur la même figure l'allure des réponses indicielles unitaires en boucle fermée pour les deux gains K_1 et K_2 .*

Question 6 : *Quelle est la précision maximale que peut atteindre ce système avec un correcteur proportionnel ?*

EXERCICE 8

Correction proportionnelle dérivée

On cherche à commander un système dont la fonction de transfert est donnée sur le lieu de Black (Figure 8.1). Ce système est inséré dans une boucle d'asservissement avec retour unitaire et munie d'un correcteur. Le correcteur sera noté $C(p)$.

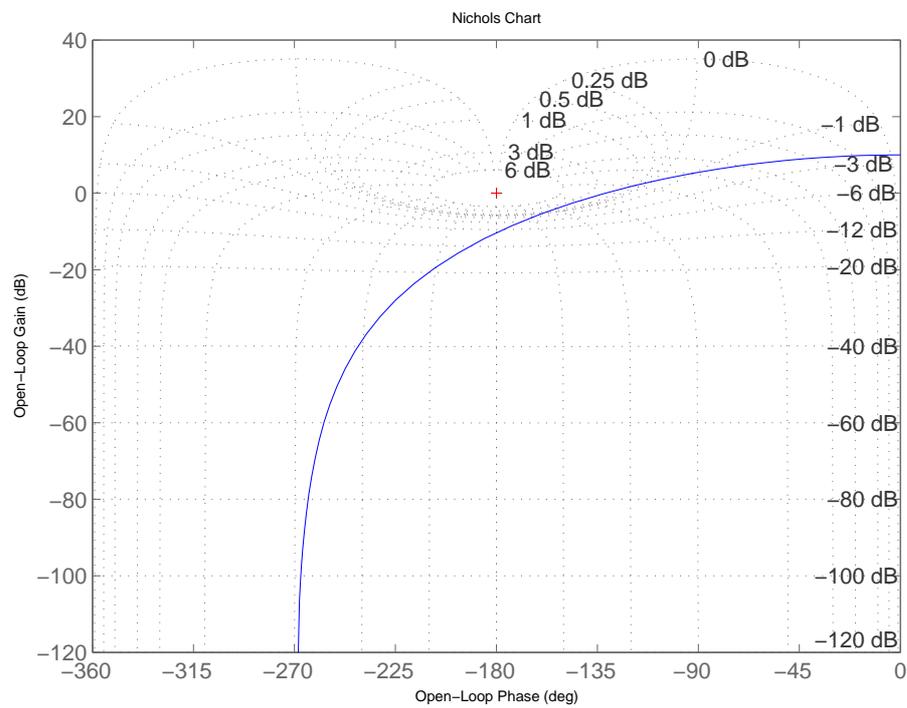


Figure 8.1 – Lieu de Black de $H(j\omega)$

Question 1 : Déterminez l'erreur minimale en boucle fermée pour une entrée en échelon si on se limite à un correcteur de type proportionnel de type $C(p) = K$.

Exercice 8. Correction proportionnelle dérivée

Question 2 : *L'application requiert une précision en boucle fermée d'au moins 1%. Calculez le gain que devrait avoir un simple gain pour atteindre cet objectif. Pourquoi ne peut-on se contenter d'un simple correcteur proportionnel ?*

On garde le gain K trouvé à la question 2 pour assurer le besoin en précision et on restabilise en remplaçant le correcteur simplement proportionnel-dérivé de la forme $C(p) = K(1 + T_d p)$.

G_{dB}	9	0	-10	-30	-45
φ°	-43	-132	-180	-228	-247
ω (rad/s)	0,04	0,182	0,13	0,85	1,57

Points du diagramme de Black de la boucle ouverte non corrigée

Question 3 : *A l'aide du tableau donnant les coordonnées de quelques points du diagramme de Black de la figure 8.1, proposez un réglage du paramètre T_d*

EXERCICE 9

Correction proportionnelle intégrale

On cherche à commander un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée sur le diagramme de Black (Figure 9.1) en l'insérant dans une boucle de régulation avec un correcteur $C(p)$. La commande réellement appliquée au système est celle donnée par le correcteur à laquelle s'ajoute une perturbation $B(p)$.

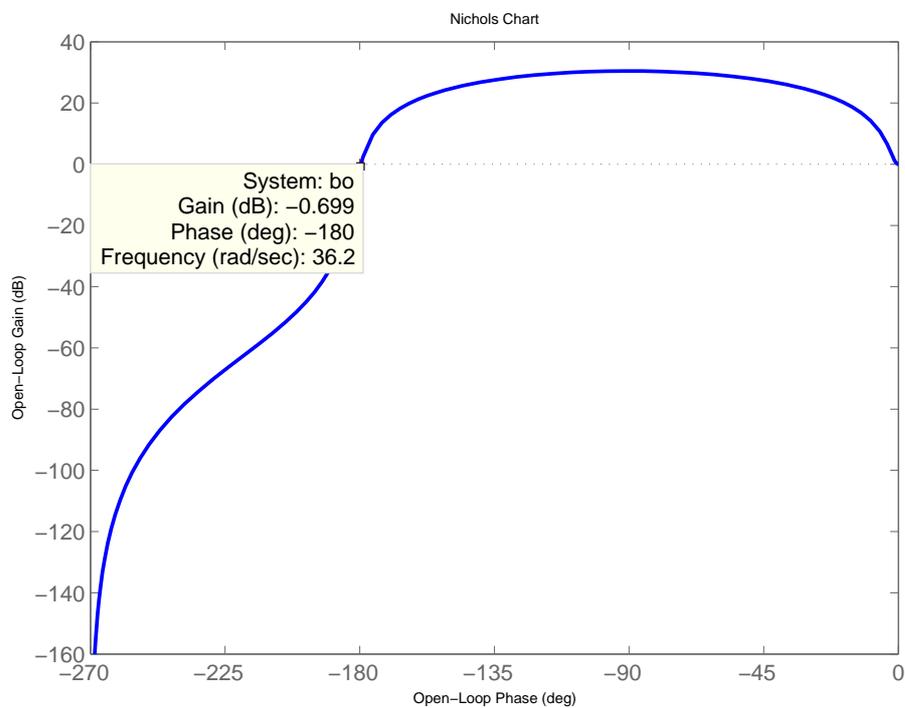


Figure 9.1 – Lieu de Black de $H(j\omega)$

Question 1 : Dessinez le schéma fonctionnel du système asservi décrit dans l'énoncé.

Exercice 9. Correction proportionnelle intégrale

Question 2 : *Quel correcteur doit-on choisir si l'on souhaite qu'en régime permanent et en l'absence de perturbation, le système réponde exactement à un échelon de consigne ?*

Dans la situation décrite, quelle sera l'erreur pour une consigne nulle et un échelon de perturbation ?

Question 3 : *On propose comme correcteur $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ avec $K = 0,01$ et $T_i = 1,4$.*

Quelle sera approximativement la marge de gain après correction ?

Question 4 : *Tracez sur le diagramme de Black l'allure de la boucle ouverte corrigée.*

Question 5 : *Calculez l'erreur de traînage en régime permanent pour une entrée en rampe de pente unité.*

En conservant le paramètre T_i donné à la question 3, calculez le gain K' tel que le système corrigé par $C'(p) = K' \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ ait une erreur de traînage de 14 pour une entrée en rampe de pente unité.

Quelle performance a-t-on dégradée en améliorant ainsi la précision ?

Question 6 : *Tracez sur une même figure l'entrée en rampe ainsi que les réponses du système corrigé par $C(p)$ et $C'(p)$*

La consigne donnée en entrée du système asservi est en forme de dents de scie de période 400 s.

Déduire qualitativement de votre figure précédente l'allure de la sortie pour le système corrigé par les deux correcteurs.

EXERCICE 10

Représentation d'état d'un système

Soit le système Σ décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + y = u$$

On pose $y = x_1$ et $\frac{dy}{dt} = x_2$ et on adopte comme vecteur d'état :

$$X = [x_1, x_2]^T$$

u est la commande et U désigne le vecteur de commande. D'autre part, seul l'état x_1 est mesuré et on appelle Y le vecteur de mesure.

Question 1 : *Donnez une représentation d'état complète du système Σ , i.e. une équation d'état et une équation d'observation.*

Question 2 : *Calculer le polynôme caractéristique de la matrice d'état, en déduire les pôles du système Σ .*

Question 3 : *D'après la nature et la valeur des pôles, décrivez le comportement dynamique de ce système.*

Question 4 : *Calculez la fonction de transfert $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$ du système Σ .*

Changement de base

Question 5 : *Dans quelle base remarquable est naturellement écrit le système Σ ?*

Question 6 : *Rappeler les formules de changement de base et proposer une représentation d'état de Σ dans la base modale.*

Exercice 10. Représentation d'état d'un système

Intégration de l'équation d'état

Question 7 : *A l'instant initial $t = 0$, l'état $X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, la commande $u(t)$ est nulle pour tout t , autrement dit, le système fonctionne en régime libre. En utilisant la représentation d'état sous forme diagonale, intégrez l'équation d'état et montrez que le régime libre s'exprime comme une combinaison linéaire des modes.*

 Commandabilité et Observabilité d'un système

Considérations sur l'équation d'état

On cherche à exploiter la structure des matrices de commande B du modèle latéral d'un avion en vue d'évaluer les effets des commandes sur les états. Soit l'équation d'état de l'avion :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\beta\beta} & A_{\beta r} & A_{\beta p} & A_{\beta\phi} \\ A_{r\beta} & A_{rr} & A_{rp} & 0 \\ A_{p\beta} & A_{pr} & A_{pp} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \\ p \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{\beta\delta_l} & B_{\beta\delta_n} \\ B_{r\delta_l} & B_{r\delta_n} \\ B_{p\delta_l} & B_{p\delta_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_l \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

β désigne le dérapage, p le roulis, r le lacet, ϕ la gîte roulis, δ_l la commande des ailerons et δ_n la commande de la gouverne de direction.

Question 1 : *Quel coefficient de la matrice de commande rend compte de l'action de la gouverne de direction sur le lacet ?*

Question 2 : *Les ailerons permettent-ils d'agir sur l'angle de gîte ?*

Commandabilité

Soit l'équation d'état du système du second ordre :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

On se propose dans un premier temps d'établir si ce système est commandable ou non de deux manières différentes.

On admet (vous pourrez le vérifier pour vous exercer) que le système admet dans la base diagonale l'équation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} u$$

Exercice 11. Commandabilité et Observabilité d'un système

La matrice de passage P telle que $X = PZ$ s'écrit : $P = \begin{pmatrix} 1.265 & 1 \\ 0.6325 & 1 \end{pmatrix}$

Question 3 : *Justifiez en vous appuyant sur la représentation d'état du système dans la base diagonale que celui-ci n'est pas commandable.*

Question 4 : *Vérifiez ce résultat au moyen du critère de commandabilité de Kalman ?*

Observabilité

La sortie mesurée a pour expression $y = -x_1 + x_2$

Question 5 : *Calculez la matrice d'observabilité et dites si ce système est observable.*

Question 6 : *Calculez la fonction de transfert $H(p)$ de ce système et conclure sur l'observabilité de l'état z_2 .*

Question 7 : *Ce système non-commandable et non-observable présente-t-il pour autant des risques lors de son utilisation ?*

EXERCICE 12

Commande modale

Soit le système Σ précédemment étudié dans l'exercice consacré à la mise sous forme de représentation d'état d'un système et pour lequel on adopte comme vecteur d'état $X = [x_1, x_2]^T$, u est la commande et U le vecteur de commande. Par ailleurs, tout l'état est mesuré et Y est le vecteur de mesure.

L'équation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

L'équation d'observation :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

On a vu que ce système avait un comportement instable *i.e.* pulsation propre non amortie $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ et $\xi = 0$. On désire donc après correction par retour d'état lui conférer le comportement suivant :

- facteur d'amortissement $\xi = 0.5$,
- pulsation propre non-amortie $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$,
- gain statique unitaire.

Question 1 : *En préalable à la mise en œuvre d'une loi de commande, quelle propriété du système doit être impérativement établie ?*

Question 2 : *Quelles sont les performances dynamiques attendues pour ce système du second ordre *i.e.* temps de réponse $T_{5\%}$ et amplitude relative du premier dépassement $D_{1\%}$?*

Commande modale

Question 3 : *Représenter le schéma du système muni de sa commande par retour d'état et du gain de précompensation. Quelle sont les dimensions des matrices de contre-réaction K et de précompensation H . Précisez la structure de ces deux matrices.*

Exercice 12. Commande modale

Question 4 : Par 3 méthodes distinctes, déterminer les valeurs des coefficients de la matrice de contre-réaction K .

Question 5 : Quelle valeur donner au gain de précompensation H pour que le gain statique de la fonction de transfert du système corrigé $\frac{y_1(p)}{u(p)}$ soit égal à un ?

EXERCICE 13

Observateurs déterministes

Théorie des observateurs

La connaissance qu'on a du système étudié l'est au moyen de la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX\end{aligned}\tag{13.1}$$

où le vecteur d'état du système $X \in R^n$, la commande $U \in R^m$ et la mesure $Y \in R^s$, ici on suppose qu'il y a moins de grandeurs mesurées que de variables d'état et $n > s$.

Il faut bien avoir à l'esprit que ces équations représentent seulement un modèle du système qui rend compte de manière imparfaite d'une réalité souvent plus complexe.

Par ailleurs, certains états sont inaccessibles à la mesure, par conséquent il n'est pas possible de disposer d'informations à leur sujet. Néanmoins, leur connaissance n'en n'est pas moins utile. C'est l'intérêt d'un observateur, sous réserve que le système soit observable, de permettre de générer une estimation de ces états.

L'observateur, à l'instar du système (13.1) est un système dynamique qui, d'une manière générale est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}} &= F\hat{X} + GU + LY \\ \varepsilon &= X - \hat{X}\end{aligned}\tag{13.2}$$

où le vecteur d'état de l'observateur est $\hat{X} \in R^n$ et $\varepsilon \in R^n$ est appelée l'erreur.

Question 1 : *En utilisant (13.1) et (13.2), établissez l'expression de la dérivée temporelle de l'erreur $\dot{\varepsilon}$ en fonction de \hat{X} et de ε .*

Question 2 : *A quelles conditions sur les matrices G, B , et A, L, C, F l'équation d'état de l'erreur $\dot{\varepsilon}$ ne dépend que de l'erreur ε ?*

Exercice 13. Observateurs déterministes

Question 3 : *Donnez alors l'équation d'état de l'observateur et celle de l'erreur.*

Question 4 : *Donnez l'expression de l'erreur $\varepsilon(t)$ alors qu'à l'instant initial, la connaissance que l'on a de l'état initial est donnée par $\hat{X}(0)$ qui diffère de l'état initial réel inconnu $X(0)$.*

Quelles conditions doivent remplir les valeurs propres de la matrice d'état pour que l'erreur converge vers 0 ?

L'erreur est-elle une grandeur physiquement accessible ?

Calcul d'un observateur déterministe

Soit le système Σ précédemment étudié dans les exercices consacrés à la mise sous forme de représentation d'état et à la commande d'un système décrit par une représentation d'état. Le vecteur d'état $X = [x_1, x_2]^T$, u est la commande et U le vecteur de commande. Par ailleurs, seul l'état x_1 est mesuré; y est la sortie mesurée et Y désigne le vecteur de mesure.

L'équation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

L'équation d'observation :

$$\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Question 5 : *En préalable à la mise en œuvre d'un observateur, quelle propriété du système doit être impérativement établie ?*

Question 6 : *Rappelez la structure d'un observateur identité et donner dans le cas du problème traité les dimensions des différentes matrices.*

Question 7 : *On désire que les pôles de l'observateur $\{p_{obs}, p_{obs}^*\}$ soient placés en $\{-5 - 5i, -5 + 5i\}$. Commentez ce choix eu égard aux valeurs des pôles du système corrigé étudié dans l'exercice précédent et dont on rappelle qu'ils valent :*

$$p_{com}, p_{com}^* = \{-1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$$

Question 8 : *Calculez la matrice de gain de l'observateur telle que les pôles de l'observateur soient ceux désirés.*

Un observateur est en fait un filtre linéaire qui peut être caractérisé par sa matrice de fonctions de transfert. On se propose d'établir cette matrice.

Question 9 : *En reprenant les résultats établis à la question 3, calculez les transformées de Laplace des équations du système et de l'observateur. En déduire une expression qui lie $\hat{X}(p)$ à $U(p)$ et $Y(p)$.*

Question 10 : *Faites l'application numérique.*

Deuxième partie

BUREAUX D'ÉTUDES

1.1 Étude d'une cuve

On se propose dans cet exercice d'établir le modèle d'une cuve représentée sur la figure 1.1. Une électrovanne permet de contrôler de débit Q_e à l'entrée, Q_s désigne le débit en sortie. La surface de la cuve est notée S et H désigne le niveau de liquide qu'on souhaite contrôler.

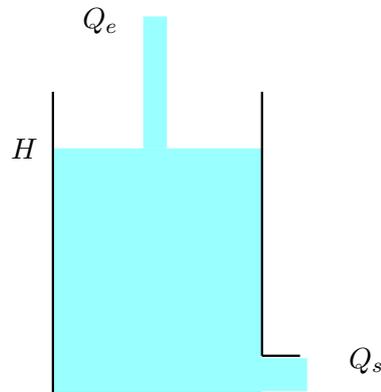


Figure 1.1 – La cuve étudiée

Question 1 : *Quelles sont les entrées et sortie de ce système ?*

1.2 Etude en régime statique

Le débit de sortie Q_s est lié au niveau de liquide H par la relation suivante :

$$Q_s = \frac{\sqrt{H}}{R} \quad (1.1)$$

où R désigne la résistance hydraulique.

Question 2 : *Quelle relation doit lier Q_e à Q_s pour que la sortie du système soit dans un état d'équilibre ?*

La cuve est initialement vide et on règle Q_e de sorte que $Q_e > Q_s$, lorsque le niveau H a atteint la hauteur désirée, on règle Q_e pour maintenir H constant.

Question 3 : *Exprimez H en fonction de Q_e .*

Question 4 : *Représentez H en fonction de Q_e et notez sur cette figure M_0 un point de repos $\{Q_{e0}, H_0\}$.*

Question 5 : *Quel est le gain statique en M_0 ?*

1.3 Etude dynamique

Question 6 : *A l'instant initial, $Q_e = Q_{e0}$ et $H = H_0$, Q_e varie alors au cours du temps faisant varier H . Etablissez la relation qui lie $Q_e(t)$ à $H(t)$ tandis qu'on observe le système pendant un court instant Δt .*

Question 7 : *On considère désormais de petites variations telles que $Q_e = Q_{e0} + \Delta Q_e$ et $H = H_0 + \Delta H$. Linéarisez l'équation différentielle établie ci-dessus et par passage à la limite, en faisant tendre $\Delta H \rightarrow h$, $\Delta Q_e \rightarrow q_e$ et $\Delta t \rightarrow dt$, établissez $\dot{h}(t) = f(h(t), q_e(t))$.*

Question 8 : *Ecrivez la transformée de Laplace de cette équation avec la condition initiale $h(0^-) = 0$. Cette condition signifie-t-elle que la cuve est initialement vide ? En déduire la fonction de transfert de la cuve.*

Question 9 : *À l'instant $t = 0$, le débit passe brusquement de Q_{e0} à Q_{e1} , calculez l'expression de $h(t)$.*

Question 10 : *Calculez $h(t)$ la hauteur de liquide dans la cuve en régime permanent, comparez cette hauteur à sa véritable valeur (censée être donnée par (1.1)). Expliquez la différence.*

1.4 Identification des paramètres du modèle d'une servocommande

La figure 1.2 montre les résultats des essais d'une servocommande soumise à un signal sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude unitaire, le signal de commande est représenté par un trait continu. L'analyse de la réponse, trait discontinu, doit permettre d'établir un modèle simple de ce système.

Question 1 : *Relever les pulsations des signaux auxquelles cette servocommande a été soumise.*

Question 2 : *Pour chaque pulsation ω , calculez le module et le gain de la fonction de transfert de la servocommande, estimez approximativement sa phase. Attention, comme dans tout processus*

1.4. Identification des paramètres du modèle d'une servocommande

de mesures, les relevés comportent de petites erreurs avec lesquelles il faut composer.

Question 3 : *Ébauchez l'allure de la réponse à un échelon unitaire de cette servocommande.*

BE 1. Modélisation d'une cuve

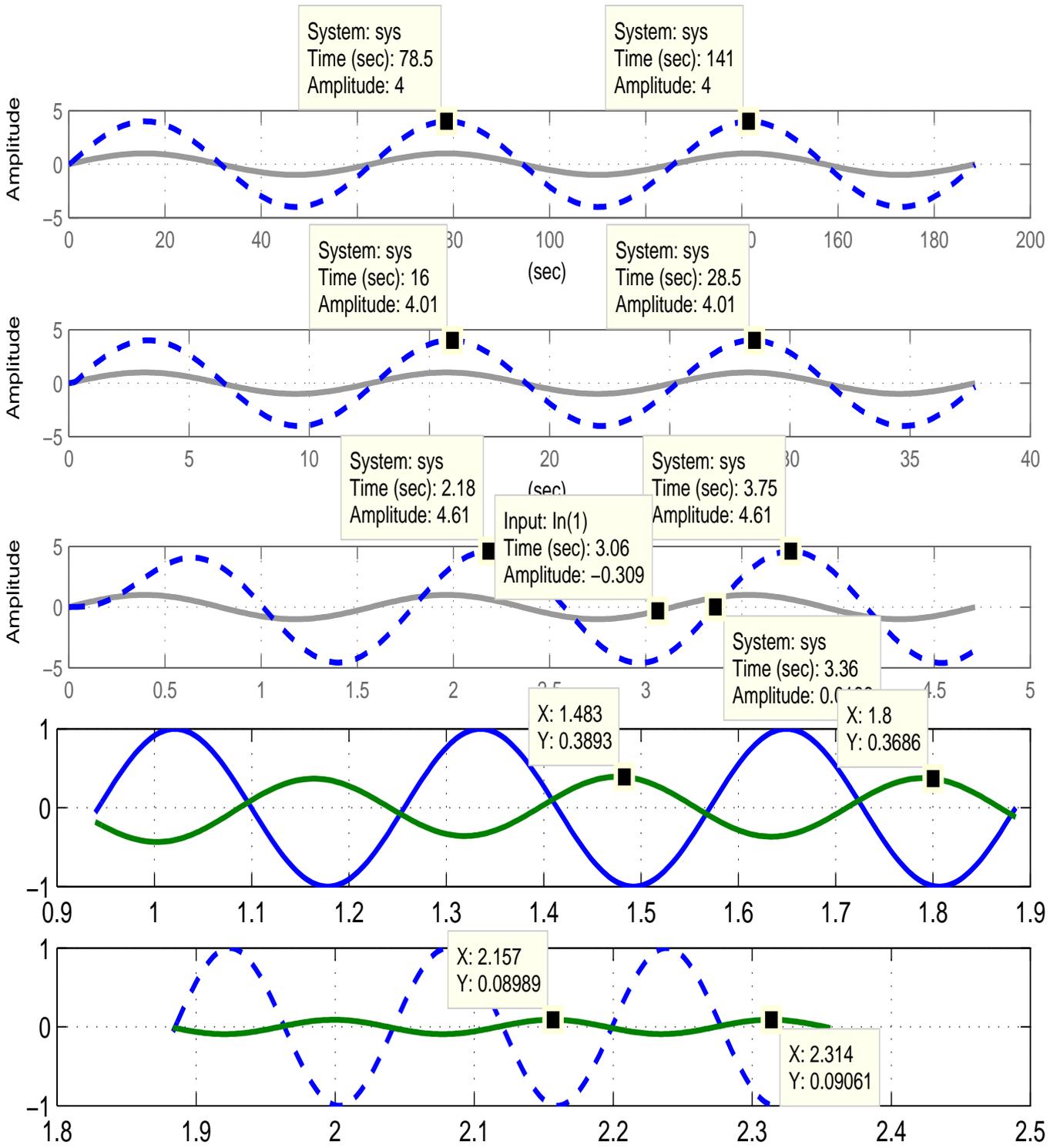


Figure 1.2 – Réponse harmonique

 Étude d'un quadrirotor

2.1 Description du système

Le but de ce TD est de dégager des hypothèses visant à simplifier l'étude d'un système complexe, de le modéliser pour ensuite le commander. Le système étudié est un aéronef à voilure tournante appelé quadrirotor et représenté sur la figure 2.1. La structure de ce quadrirotor est

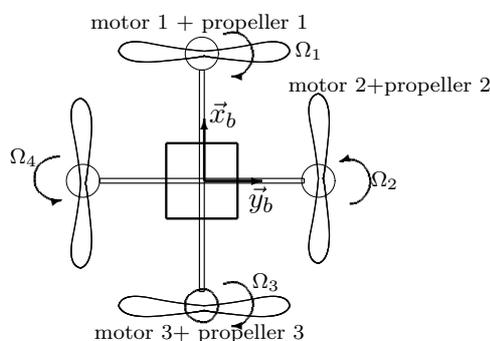


Figure 2.1 – Vue de dessus du quadrirotor

supposée rigide, de masse m constante et le centre de gravité est fixe. Soit $R_E = (O, \vec{x}_E, \vec{y}_E, \vec{z}_E)$, un repère inertiel orthonormé où \vec{x}_E pointe vers le nord, \vec{y}_E vers l'est et \vec{z}_E pointe en direction de la terre. Le vecteur $\vec{\xi}^{R_E} = (x, y, z)^T$ repère la position du centre de gravité du drone dans R_E . Soit $R_b = (c.g., \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$ un repère orthonormé lié au véhicule et partiellement représenté sur la figure 2.1. Les vitesses linéaires $\vec{\mu}^{R_b} = (u, v, w)^T$ et les vitesses angulaires $\vec{\Omega}^{R_b} = (p, q, r)^T$ appelées respectivement roulis, tangage et lacet sont exprimées dans R_b .

Ce quadrirotor est un système multivariable qui possède

— quatre commandes : la poussée T , les moments de roulis L , de tangage M et de lacet N .

— quatre sorties : l'angle de gîte ϕ , l'angle assiette θ , le cap ψ et l'altitude $h = -z$.

Il est muni d'actionneurs et de capteurs, soit :

— quatre moto-réducteurs entraînant les quatre hélices. Les vitesses de rotation des hélices sont notées Ω_i où $i = \{1, \dots, 4\}$.

— une centrale d'attitude qui mesure ϕ , θ , ψ , et un capteur barométrique pour la mesure de h .

— La poussée T est obtenue en commandant simultanément la poussée des quatre moteurs :

$$T = k_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

— Le moment de roulis en commandant un différentiel de poussée entre les hélices 2 et 4

$$L = k_2(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2)$$

— Le moment de tangage en commandant un différentiel de poussée entre les hélices 1 et 3 :

$$M = k_2(\Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

— Le moment de lacet en commandant un différentiel de trainée entre les hélices $\{1, 3\}$ et $\{2, 4\}$:

$$N = k_3(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)$$

k_1, k_2, k_3 sont des paramètres qui dépendent des hélices et des dimensions du quadrirotor.

Question 1 : *Si les entrées de commande de ce système ont été bien identifiées, qu'en est-il des entrées de perturbations ? À quel type de perturbation peut être soumis le quadrirotor ?*

2.2 Hypothèses de travail

Continuité, Invariance

Le modèle du quadrirotor est obtenu en écrivant la relation fondamentale de la dynamique, le théorème du moment cinétique et les relations cinématiques. Seules les équations utiles à l'étude de ce système seront détaillées.

Question 2 : *Selon vous, ce système satisfait-il aux hypothèses de continuité et d'invariance ?*

Linéarisation du modèle

L'équation qui suit procède de la relation fondamentale de la dynamique, g désigne l'accélération de pesanteur :

$$\dot{w} = -pv + qu + g\cos\phi\cos\theta - \frac{k_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)}{m}$$

A l'évidence, cette seule équation montre que le quadrirotor n'est pas un système linéaire.

2.3. Fonction de transfert et analyse temporelle

Question 3 : *Exprimez qualitativement à quoi correspond une situation d'équilibre pour le quadrirotor (celle correspondant au quadrirotor posé, hélices à l'arrêt est sans intérêt). Exprimez formellement une condition d'équilibre pour le vol stationnaire. Calculez alors la vitesse de rotation des moteurs correspondant à cet équilibre, soit Ω_e cette vitesse.*

Linéarisation

On étudie le mouvement autour de l'axe de tangage \vec{y}_b . En écrivant le théorème du moment cinétique et des relations cinématiques, on montre que :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{I_T} k_2 (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ \dot{\theta} &= q\end{aligned}$$

où I_T est le moment d'inertie autour de l'axe de tangage.

Question 4 : *Pour le point d'équilibre défini précédemment, linéarisez les équations des dérivées temporelles du tangage et de l'assiette. On note Ω_e, q_e, θ_e les valeurs à l'équilibre de Ω, q, θ et $\tilde{\Omega}, \tilde{q}, \tilde{\theta}$ les variations de ces variables autour de l'équilibre de sorte que : $\Omega = \Omega_e + \tilde{\Omega}, \theta = \theta_e + \tilde{\theta}$ and $q = q_e + \tilde{q}$*

2.3 Fonction de transfert et analyse temporelle

On pose $\tilde{M}(s) = 2k_2 (\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_3) \Omega_e$ la transformée de Laplace de la commande du moment de tangage, linéarisée et obtenue pour de petites variations de la vitesse des hélices autour de leur valeur d'équilibre.

Question 5 : *Ecrivez l'expression Laplacienne liant la fonction de transfert $\tilde{\theta}(s)$ à $\tilde{M}(s)$. Vous prendrez soin d'exprimer les conditions initiales que vous distinguerez des conditions d'équilibre.*

Question 6 : *Etablissez $H(s) = \frac{\tilde{\theta}(s)}{\tilde{M}(s)}$ la fonction de transfert du quadrirotor pour l'axe de tangage et proposez un schéma fonctionnel.*

Question 7 : *Quels sont les pôles, les zéros et le gain statique de cette fonction de transfert ?*

Question 8 : *Comment se comporterait le quadrirotor en réponse à une impulsion de commande de poids quelconque.*

Etablissez les expressions temporelles du tangage $\tilde{q}(t)$ et de l'assiette $\tilde{\theta}(t)$ en réponse à une entrée de commande réalisée par une impulsion de poids Δ_m . Que dire de la stabilité de ce système ?

Question 9 : *Tracez le lieu de Black-Nichols de la fonction de transfert $H(j\omega)$ et relevez les points remarquables.*

2.4 Introduction à la commande

En mécanique générale, et pour des systèmes en rotation, il est d'usage de décrire un moment de rappel par le produit d'un coefficient de raideur par un angle. De même, un moment de frottements visqueux est décrit par le produit d'un coefficient de frottement par une vitesse angulaire. Or, l'assiette θ et le tangage q sont mesurés ; si l'on exploite ces mesures pour générer la loi de commande, il sera possible d'introduire des moments de rappel et de frottement visqueux qui permettront de stabiliser le quadrirotor. Le schéma fonctionnel du quadrirotor muni d'une telle loi de commande est représenté sur la figure 2.2, δ_m correspond à la commande en tangage appliquée par le pilote. Sur ce même schéma, K_q et K_θ sont des gains réglables.

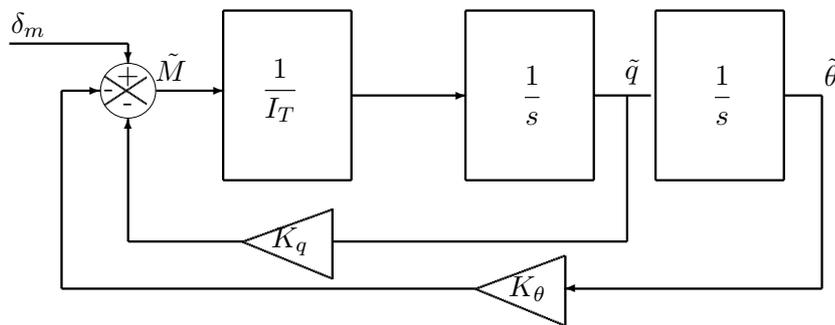


Figure 2.2 – Le schéma fonctionnel du drone muni d'une commande en tangage

Question 10 : En utilisant le schéma de la figure 2.2, écrivez l'expression du moment de tangage $\tilde{M} = f(\tilde{\theta}, \tilde{q}, \delta_m)$ et déduisez-en la fonction de transfert qui lie $\tilde{\theta}(s)$ à $\delta_m(s)$.

Question 11 : Identifiez cette fonction de transfert à celle d'un système d'ordre deux dont vous préciserez le gain statique, la pulsation propre non-amortie et le facteur d'amortissement réduit.

Question 12 :

- Sur quel gain et comment agir sur ce gain pour conférer au quadrirotor une plus grande précision (ici l'aptitude du quadrirotor à rester le plus proche de sa position d'équilibre en présence de perturbations). Quelle performance serait en contrepartie dégradée ?
- Proposez une valeur du facteur d'amortissement réduit et le réglage des gains afférents (en fait, une relation entre K_q et K_θ) pour que le quadrirotor, écarté de sa position d'équilibre, y revienne le plus rapidement possible.

Question 13 : On donne $I_T = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$ et on augmente les gains K_θ et K_q tout en réalisant sur ces gains la contrainte établie à la question précédente i.e. maintenir un facteur d'amortissement réduit $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Rappelez l'expression de la pulsation propre non-amortie ω_n et représentez dans le plan complexe le lieu des pôles paramétré en K_θ .

2.4. Introduction à la commande

Un sous-système groupe propulsif composé de l'ensemble {moteur, réducteur, hélice} peut être décrit par un système du premier ordre de fonction de transfert :

$$\frac{\Omega_i(s)}{U_i(s)} = \frac{40}{0.01s + 1}$$

Où Ω_i est la vitesse de rotation du moteur i et $u_i(t)$ est la tension de commande de ce moteur. Le quadrirotor est correctement commandé si le groupe propulsif réagit plus rapidement aux variations de la tension de commande que l'angle de tangage aux variations de la commande en tangage.

Question 14 : *Sur la carte des pôles tracée à la question précédente, portez le pôle du sous-système et indiquez les régions du plan complexe correspondant à des réglages admissibles/inadmissibles pour K_θ .*

Régulateur de distance d'une voiture

On suppose disposer à bord d'une voiture d'un dispositif permettant de mesurer la distance qui la sépare de la voiture qui la précède. On se propose d'étudier la régulation de cette distance.

3.1 Modélisation

Modélisation de la voiture

Une voiture roule en ligne droite, sur le plat à $V_{eq} = 130 \text{ km/h}$ pour une commande des gaz égale à la demi-ouverture de l'admission en carburant. On note cette commande des gaz à l'équilibre $X_{eq} = 50$.

On notera v et x les écarts aux valeurs à l'équilibre.

La figure 3.1 représente l'accroissement de vitesse (en km/h) v consécutive à un accroissement de commande $x = 1$.

BE 3. Régulateur de distance d'une voiture

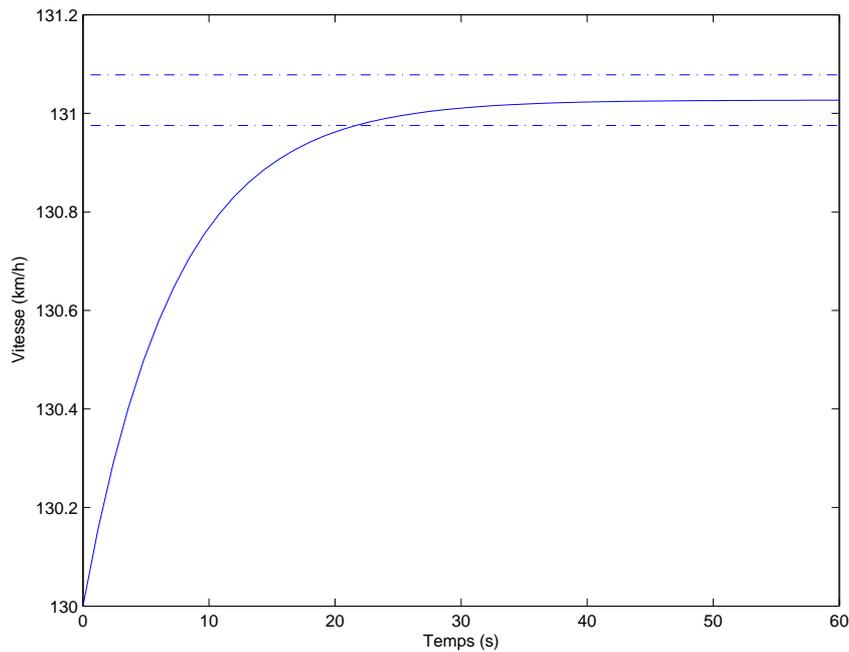


Figure 3.1 – Réponse en vitesse à un accroissement de commande des gaz de 1%

Question 1 : *A quel système simple peut-on assimiler la voiture autour de sa position d'équilibre ? Déterminer les paramètres caractérisant ce modèle.*

Modélisation des deux voitures

On poursuit un véhicule qui se trouve initialement à la distance d_0 . On appellera *cible* le véhicule poursuivi.

On note v_c une variation de la vitesse de la cible.

Question 2 : *Compléter le schéma de la figure 3.2 (on rappelle que les vitesses sont exprimées en km/h). Préciser la nature des deux entrées.*

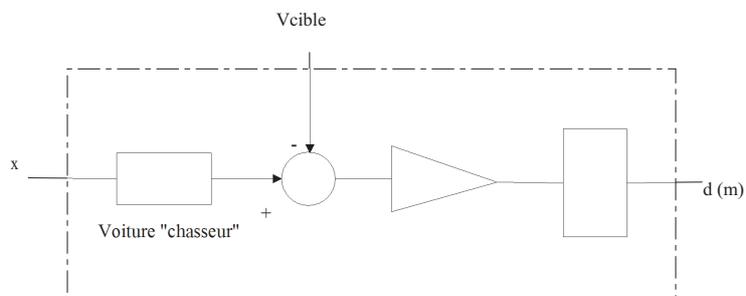


Figure 3.2 – Modèle de synthèse

3.2. Commande

Question 3 : Donner les fonctions de transfert en boucle ouverte $F(p) = \frac{d(p)}{x(p)}$ et $G(p) = \frac{d(p)}{v_c(p)}$.

Question 4 : A commande de gaz constante, comment évolue la sortie du système si la vitesse de la cible augmente pendant un laps de temps borné ? (on ne fera appel qu'à un bon sens élémentaire...)

Quelle en est la traduction en terme de stabilité du système ?

L'objectif de garder constante la distance entre les deux véhicules est-il réalisable en boucle ouverte ?

3.2 Commande

On dispose d'un capteur mesurant la distance séparant les deux véhicules.

Question 5 : Le capteur de distance étant supposé parfait, faire le schéma de la boucle de régulation pour un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ quelconque.

Commande proportionnelle

On commence par envisager une commande proportionnelle : $C(p) = K$

Question 6 : Par un simple raisonnement qualitatif, quel doit être le signe de K pour que le système soit stable ? Esquisser l'allure du lieu de Black de $KF(p)$ lorsque $K = -1$.

Question 7 : Toujours pour $K = -1$, calculer la pulsation pour laquelle le gain (en dB) de la fonction de transfert en boucle ouverte $KF(j\omega)$ est nul, on notera ω_{0dB} cette pulsation. Calculer la marge de gain et la marge de phase.

Question 8 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $H(p) = \frac{d(p)}{d_c(p)}$ en fonction de K . Pour cette question, la cible roule à la vitesse d'équilibre, autrement dit $v_{cible} = 0$.

Question 9 : Tracer dans le plan complexe le lieu des pôles de $H(p)$ pour $K < 0$ et retrouver le résultat de la question 6.

Question 10 : Décrire l'allure de la réponse indicielle en boucle fermée pour des valeurs croissantes de $|K|$ pour le signe de K assurant la stabilité.

Question 11 : Quelle est la marge de gain du système bouclé ?

Question 12 : Calculer la précision de la régulation réalisée pour un échelon de la distance de consigne (à variation nulle de vitesse de la cible). Même question pour une variation de la vitesse de la cible (à consigne constante). Que faudrait-il faire pour obtenir une meilleure précision ? Quelle autre conséquence aurait-on ? Comment peut-on y remédier ?

Attention à l'application des formules du cours, elles ne s'appliquent qu'à l'un des deux cas... Dans le doute il est conseillé de calculer directement les erreurs.

BE 3. Régulateur de distance d'une voiture

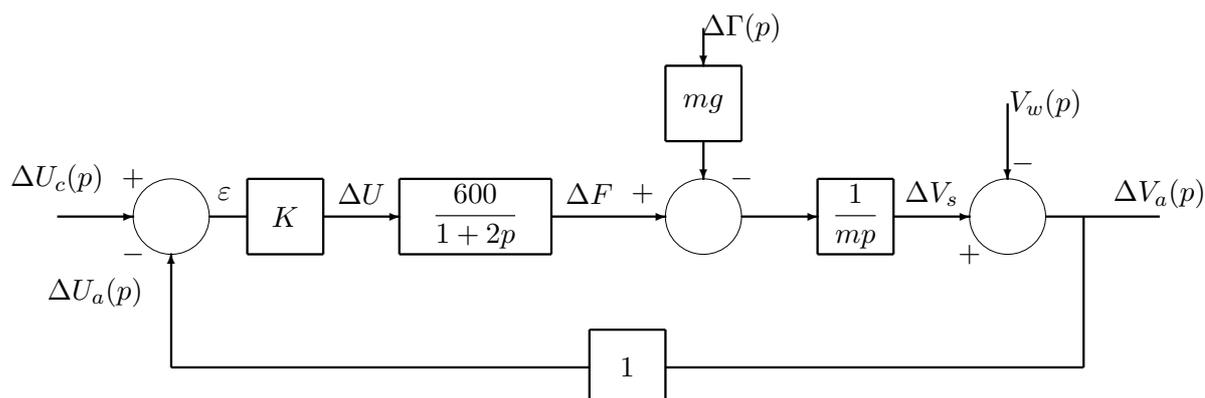
Question 13 : *Application numérique : on cherche à asservir la distance à 50m, le véhicule poursuivi accélère de 5 km/h, calculer pour quels gains K la précision est supérieure à 10 %*

 Étude d'une automanette

Présentation

L'automanette est une commande automatique de la chaîne des gaz d'un avion. Son but est d'ajuster la commande des gaz donnée au moteur afin de maintenir constante la vitesse longitudinale par rapport à l'air de l'appareil. Elle nécessite une centrale anémométrique pour la mesure de la vitesse relative V_a .

Le diagramme fonctionnel de l'automanette que l'on a simplifié en négligeant la traînée est donné ci-dessous :



Notations

ΔU_c	Consigne de variation de la vitesse avion/air	$\Delta \Gamma$	Variation pente
ΔU_a	Mesure de la variation de la vitesse avion/air	V_w	Vitesse vent/sol
ΔV_a	Variation effective de la vitesse avion/air	m	Masse de l'avion (8160 kg)
ΔV_s	Variation de la vitesse avion/sol	g	Pesanteur (10 m/s ²)

4.1 Correction proportionnelle

Réponse à une consigne

Question 1 : Déterminez la FTBO du système $F(p) = \frac{\Delta U_a(p)}{\varepsilon(p)}$ en absence de perturbations, c'est-à-dire lorsque $\Delta\Gamma = V_w = 0$.

Question 2 : Calculez la FTBF $H(p) = \frac{\Delta V_a(p)}{\Delta U_c(p)}$, les perturbations étant toutes nulles.

Question 3 : On souhaite un comportement en boucle fermé du second ordre et bien amorti. On se fixe comme objectif d'avoir un amortissement réduit $\xi = 0,7$.

Quelle est alors la pulsation propre non amortie ω_n ? Que doit-on choisir comme gain K ?

On conservera la valeur de K dans toute la suite du problème.

Question 4 : Déterminez le temps de réponse $T_{5\%}$.

Question 5 : Quel est l'accroissement de vitesse en régime permanent $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V_a(t)$ suite à un accroissement de la consigne en échelon d'amplitude $\Delta U_{c0} = 1 \text{ m/s}$?

On pourra répondre de deux manières, en raisonnant sur l'expression de la FTBF ou de la FTBO.

Question 6 : Tracer le lieu d'Evans pour $K > 0$ et pour $K < 0$. Comment doit-on choisir le gain pour que le système en boucle fermé soit stable ? Interprétez ce résultat physiquement.

Réponse aux perturbations

Question 7 : Calculez l'expression de $G_1(p) = \frac{\Delta V_a(p)}{\Delta\Gamma(p)}$ représentant la réponse en vitesse à une variation de pente. Déduisez-en $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V_a(t)$ lorsque $\Delta\Gamma$ est un échelon d'amplitude $\Delta\Gamma_0 = 0.017 \text{ rad} = 1^\circ$, les autres entrées étant nulles.

Question 8 : Calculez l'expression de $G_2(p) = \frac{\Delta V_a(p)}{V_w(p)}$ représentant la réponse de l'avion à une variation de vitesse du vent V_w .

Déduisez-en $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V_a(t)$ lorsque V_w est un échelon d'amplitude $V_{w0} = 1 \text{ m/s}$ les autres entrées étant nulles.

Calculez de même $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V_a(t)$ lorsque le vent varie linéairement sous la forme $V_w(t) = \frac{t}{2} \text{ m/s}$.

4.2 Correction proportionnelle-intégrale

On envisage maintenant un correcteur proportionnel-intégral. On remplace donc K par un bloc de fonction de transfert $K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$.

4.3. Correction à avance de phase

Question 9 : Justifiez sans calcul pourquoi ce type de correcteur permet d'annuler les erreurs statiques dues aux perturbations.

Question 10 : On choisit le paramètre $T_i = \frac{10}{\omega_n}$ (avec ω_n la pulsation propre non amortie du système en boucle fermée).

La figure 4.1 représente la FTBO du système corrigé avec un gain $K = 3,47$.

Retrouvez graphiquement le point correspondant à $\omega = \omega_n$. A partir de cette position, justifiez le choix qui a été fait et esquissez l'allure du lieu de Black du système corrigé en boucle ouverte.

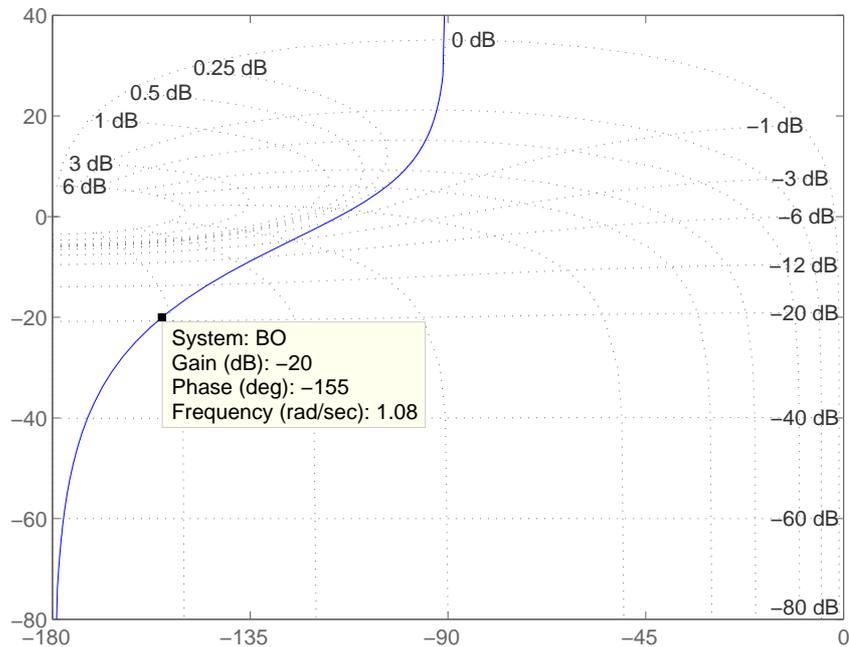


Figure 4.1 – Lieu de Black de $K.FTBO(p)$

4.3 Correction à avance de phase

Une alternative au correcteur proportionnel-intégral qui annule les erreurs est d'augmenter le gain K pour les ramener à des valeurs acceptables.

Question 11 : En reconsidérant à nouveau un correcteur purement proportionnel, quel gain K' faudrait-il choisir pour diminuer toutes les erreurs statiques d'un facteur 10 ? Déterminez graphiquement les nouvelles marges de stabilité en boucle fermée.

Question 12 : Pour restaurer des marges de stabilité satisfaisantes, on choisit un correcteur à avance de phase : $C_{aPh}(p) = K' \frac{1 + \alpha\tau p}{1 + \tau p}$ avec $\alpha > 1$.

Proposez un réglage permettant de sortir la FTBO corrigée hors du contour 0 dB en boucle fermée.

BE 4. Étude d'une automanette

Question 13 : *Qu'a-t-on cherché à faire avec ce réglage sortant la FTBO du contour à 0 dB en boucle fermée ?*

Troisième partie

**TRAVAUX DIRIGÉS ASSISTÉS
PAR ORDINATEUR**

Initiation à MATLAB

Cette séance a pour but de vous familiariser à l'utilisation du logiciel de calcul MATLAB, et plus particulièrement à l'utilisation de ses fonctions dédiées à l'automatique.

On démarre MATLAB en double cliquant sur l'icône MATLAB présente sur le bureau de Windows .

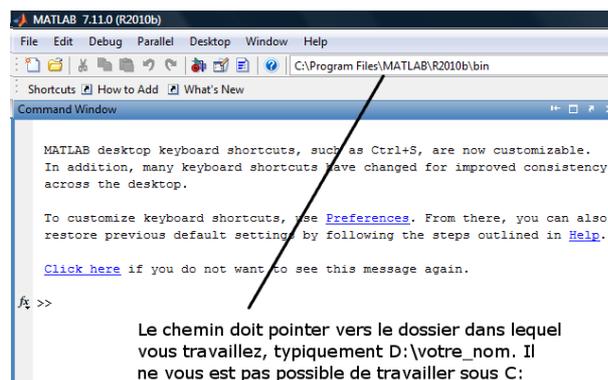


Figure 1.1 – Le Command Window de Matlab

Les commandes qui vont être utilisées peuvent être saisies à partir de la fenêtre *Command Window* de MATLAB ou mieux, dans un fichier créé dans l'éditeur de texte accessible depuis *File* \rightsquigarrow *New* \rightsquigarrow *Script*.

1.1 Travaux élémentaires sur les matrices

Tous les objets manipulés par MATLAB peuvent être considérés comme des matrices. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \text{valeur1} & \text{valeur2} & \text{valeur3} \\ \text{valeur4} & \text{valeur5} & \text{valeur6} \end{pmatrix}$$

est définie sous MATLAB comme suit : `A = [valeur1 valeur 2 valeur3 ; valeur4 valeur5 valeur6]`

Un espace ou une virgule sépare deux éléments d'une même ligne et le point virgule indique la séparation de ligne.

Saisir les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et effectuer la série de calculs suivants en contrôlant

les résultats obtenus¹ :

1. $B = A + A$
2. $C = A^2$ ainsi que $D = A * A$ puis comparer le résultat de C à celui de D
3. inverse d'une matrice : $\text{inv}(A)$
4. transposée de la matrice A : A'
5. calculer le déterminant de A : $\text{det}(A)$
6. déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A (consultez l'aide en ligne de la fonction *eig* en écrivant *help nom_de_la_fonction*, ici *help eig*)
7. trouver le rang de la matrice A , fonction *rank*,
8. saisir la matrice \mathbb{I}_3 , fonction *eye*
9. concaténation horizontale de A et B soit : $[A, B]$
10. concaténation verticale de A et B soit $[A; B]$
11. extraction du terme de la première ligne, troisième colonne de A : $A(1,3)$
12. extraction de la troisième ligne de A : $A(3,:)$
13. extraire la deuxième colonne de A

1.2 Les polynômes

La saisie des polynômes est nécessaire à celle des fonction de transferts :

Un polynôme de degré n : $P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est défini sous Matlab comme une matrice de dimension $1 \times n$ sous la forme suivante :

$$P = [a_n \dots a_3 a_2 a_1 a_0]$$

Soit le polynôme suivant $P = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x - 8$

1. Lorsque la ligne de commande est suivie d'un ; le calcul est effectué, éventuellement stocké dans une variable mais le résultat n'est pas restitué à l'écran.

1.3. Fonctions de transfert et analyse des systèmes LIC

1. Saisir ce polynôme sous MATLAB,
2. Déterminer les racines de ce polynôme (fonction Matlab *roots*) et les stocker dans une variable *R*,
3. Rétablir le polynôme *P* à partir des racines trouvées précédemment et stockées dans *R* (fonction Matlab *poly*).

1.3 Fonctions de transfert et analyse des systèmes LIC

La fonction de transfert qui caractérise un système est un objet défini de la façon suivante : $system=tf(num,den)$ où *num* et *den* sont les polynômes apparaissant au numérateur et au dénominateur.

L'analyse d'un système décrit par une fonction de transfert est menée au moyen de la fonction *ltiview*.

1. saisissez la fonction de transfert suivante : $H(p) = \frac{8}{p^2 + 4p + 4}$
2. depuis le Command Window ou depuis votre script, exécutez *ltiview*, une fenêtre s'ouvre,
3. cliquez sur *file* \rightsquigarrow *import*, une fenêtre s'ouvre, sélectionnez l'objet *system* puis validez en cliquant sur le bouton *OK*,
4. la réponse indicielle apparait,
 - clic droit \rightsquigarrow *plot types*, vous pouvez afficher les réponses indicielles, impulsionnelles, à des conditions initiales, le diagramme de Bode, le lieu de Black-Nichols, la carte des pôles et des zéros, *etc.*
 - après avoir choisi une représentation, clic droit \rightsquigarrow *characteristics*, permet d'afficher les caractéristiques de la réponse choisie : temps de réponse (settling time²), dépassement (peak response), permanent (steady state), *etc.* pour une réponse indicielle.
5. visualisez la réponse indicielle et le diagramme de Bode du système décrit par $H(p)$, relevez sur chacune de ces représentations les caractéristiques et comparez-les à celles attendues en utilisant les abaques du cours sur les systèmes d'ordre deux,
6. visualisez la carte des pôles et des zéros, cliquez droit et activez l'option *grid*, lire les valeurs du facteur d'amortissement réduit et de la pulsation propre non amortie de $H(p)$.

1.4 Synthèse de lois de commande pour les systèmes monovariante

A l'instar de *ltiview* qui permet d'analyser les performances d'un système au travers de l'étude des caractéristiques de sa réponse, *sisotool* est un programme qui facilite la synthèse de lois de commande et l'évaluation des performances des systèmes asservis munis de ces lois de commande. On souhaite mettre en œuvre une correction proportionnelle pour le système représenté sur la figure 1.2. La fonction de transfert $H(p)$ étudiée est celle qui a été définie dans la partie précédente.

2. Par défaut, sur MATLAB, le temps de réponse est défini à 2%, il convient de modifier cette valeur en faisant clic droit \rightsquigarrow *properties* \rightsquigarrow *options*

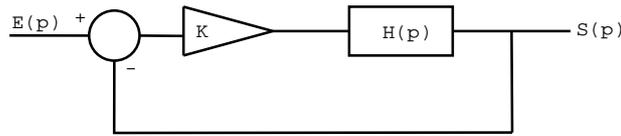


Figure 1.2 – Schéma du système étudié

Figure 1.3 – L'environnement de sisotool

1. depuis le Command Window, tapez et exécutez *sisotool*, une fenêtre s'ouvre. La conception de la loi de commande et l'évaluation des performances du système ainsi corrigé s'opèrent en ouvrant successivement les onglets de la gauche vers la droite.
2. L'onglet *Architecture* permet de définir la structure de la boucle à contrôler et les valeurs des différentes fonctions de transfert.
 - bouton *Control Architecture* : vérifiez que la structure sélectionnée est celle désirée, relevez sur le schéma le nom des variables utilisées pour définir les fonctions de transfert et les signaux.
 - bouton *System Data* : allouez les fonctions de transfert dans les champs prévus à cet effet de sorte que la structure de la boucle proposée par *sisotool* soit cohérente avec celle représentée sur la figure 1.2. A ce stade le correcteur $C = 1$. Le bouton *Browse* permet d'importer dans *sisotool* les fonctions de transfert déclarées dans *MATLAB*.
3. L'onglet *Compensator Editor* : C représente le gain statique du correcteur, soit K pour le système étudié. A ce stade, laissez $C = 1$.
Notez qu'il est possible de synthétiser des correcteurs plus sophistiqués en ajoutant des pôles et des zéros.
4. onglet *Graphical Tuning* : dans ce menu, vous choisissez le type de graphique utilisé pour la synthèse du correcteur, la plupart du temps nous utiliserons le lieu des racines et le lieu de Black-Nichols.
 - *plot1* : choisissez *root locus*
 - *plot2* : choisissez *nichols*
 Cliquez ensuite sur le bouton *Show design plot*. Pour les différents graphiques, cliquez droit \rightsquigarrow *grid*.
5. onglet *Analysis Plot* : pour afficher une réponse indicielle correspondant au réglage effectué :
 - sélectionnez *Plot type : step*
 - cochez *closed loop r to y*
 - bouton *Analysis plot*

Pour le réglage du correcteur, sous l'onglet *Graphical tuning*, déplacez avec la souris les pôles sur le lieu des racines pour leur donner la configuration souhaitée ou translater le lieu de

1.5. Simulink

Black-Nichols jusqu'à par exemple atteindre la marge de phase désirée. Il faut ensuite lire dans l'onglet *Compensator editor* la valeur de C ayant permis ce réglage.

Synthétisez un correcteur proportionnel qui confère à la boucle d'asservissement un gain à la résonance en boucle fermée de $0dB$, et observez les caractéristiques de la réponse indicielle du système ainsi contrôlé.

1.5 Simulink

Pratiquement, le modèle de synthèse représenté par une fonction de transfert permet l'analyse et le dimensionnement d'une loi de commande. Ces études ont été menées dans les sections précédentes au moyen de *ltiview* et *sisotool*.

Il convient ensuite de valider les résultats obtenus au travers de simulations sur un modèle plus représentatif de la réalité. *SIMULINK* est un utilitaire de *MATLAB* qui permet la simulation temporelle des systèmes dynamiques. Le modèle du système étudié est représenté graphiquement en interconnectant des fonctions contenues dans des bibliothèques.

On souhaite simuler le système contrôlé par la loi de commande établie à la section précédente et représenté sur la figure 1.4.

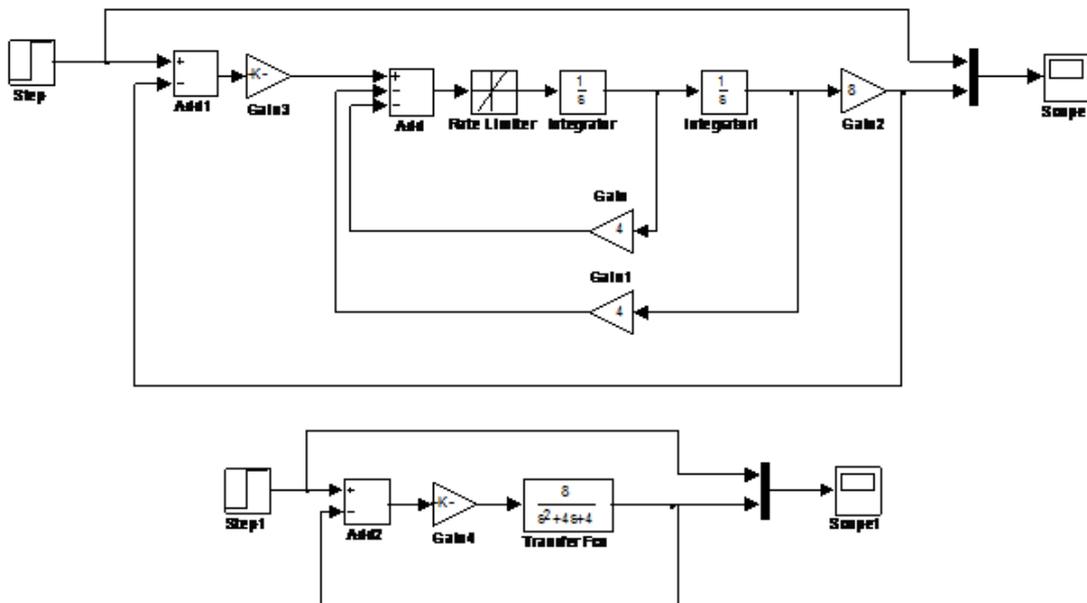


Figure 1.4 – Schéma boucle ouverte

SIMULINK est exécuté à partir du *Command Window* de *MATLAB* en cliquant sur le



bouton

Une fenêtre intitulée *Simulink Library Browser* s'ouvre, elle est composée d'une distribution de bibliothèques sous forme d'icônes.

Il faut ensuite ouvrir une fenêtre dans laquelle vous construirez votre modèle : *File* \rightsquigarrow *New* \rightsquigarrow *Model*. Vous trouverez les fonctions utiles à la réalisation de ce schéma dans les bibliothèques suivantes :

fonction	Bibliothèques
transfer function, integrator	Continuous
Sommateur, Product, Gain, (. ²)	Math Operations
Step	Sources
Scope	Sinks
Mux	Signal Routing
rate limiter	Discontinuities

Il faut ensuite double-cliquer sur chaque bloc pour le paramétrer, à l'instar des échelons de consigne :

Step Time	0
Initial Value	0
Final Value	0.1, 0.35, 1
Sample Time	0

ou du *rate limiter* qui permet d'introduire une non linéarité dans le modèle de simulation :

Rising slew rate	2
Falling slew rate	-2

Lancez une simulation  et visualisez les résultats sur les *Scope*. Comparez-les réponses à celles obtenues sous *sisotool*.

Il n'est pas possible de faire le relevé des coordonnées d'un point sur le *Scope*. On peut toutefois imprimer ces courbes sur une figure sur laquelle on pourra lire les coordonnées et qu'on pourra avantageusement *copier-coller* dans un traitement de texte.

1. double-cliquez sur le scope qui affiche le signal que vous voulez traiter,
2. cliquez sur l'icône *Parameters* \rightsquigarrow onglet *History*
3. décochez la case *Limit data point to last*
4. cochez la case *Save data to workspace*
5. donnez un nom explicite à la variable, par exemple *out* et choisissez le format *Array*, validez
6. relancez la simulation
7. *out* est un tableau accessible depuis le *Command Window* dont la première colonne est le temps, les colonnes suivantes sont les valeurs prises par les signaux appliqués au *Scope*.

1.5. Simulink

La commande `plot(out(:,1),out(:,2))` permet d'afficher le premier signal.

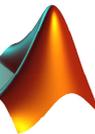
 Systèmes d'ordre un et deux

Le but de ce TDAO est la familiarisation avec le logiciel Matlab, en particulier les commandes utiles en Automatique ainsi que l'approfondissement des connaissances vues en cours et lors des exercices sur papier.

2.1 Quelques manipulations sous Matlab

Question 1 : *Démarrez Matlab et saisissez la fonction de transfert suivante :*

$$H(p) = \frac{\theta_2(p)}{T_c(p)} = \frac{2}{p^2 + 0,04p + 1}$$

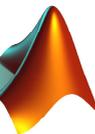


TRUCS & ASTUCES MATLAB

- plutôt que de rentrer les commandes dans la fenêtre, travailler de préférence dans une fenêtre dans l'éditeur (File \rightsquigarrow New \rightsquigarrow Script)
- utiliser la fonction `tf`. Synthaxe `sys = tf([coefs num], [coefs den])`
- sauver et exécuter le programme

Question 2 : *Visualisez le diagramme de Bode (`bode(sys)`), le diagramme de Black-Nichols (`nichols(sys)`), la carte des pôles (`pzmap(sys)`), la réponse indicielle (`step(sys)`), la réponse impulsionnelle (`impz(sys)`)*

Relevez les caractéristiques des systèmes grâce au clic droit



TRUCS & ASTUCES MATLAB

- On évite qu'une représentation graphique n'écrase la précédente en faisant précéder chaque commande par `figure(num)`
- Par défaut le temps de réponse est donné à 2%. Clic-droit \rightsquigarrow Properties \rightsquigarrow onglet Options pour régler le temps de réponse à 5%

Question 3 : Retrouvez les résultats précédents par l'environnement LtiView.

Pour cela, exécutez ltiview dans la fenêtre de commande ou le programme en .m. Importez le système (File \rightsquigarrow Import)

2.2 Etude d'une roue de réaction

On note ψ l'angle entre l'axe d'un satellite et la droite reliant le centre de gravité du satellite au centre de la Terre.

Le satellite est commandé par une roue à réaction qui lui transmet un couple de commande C_m .

Le gradient de gravité exerce sur le satellite un couple de rappel élastique $-k\psi$ et la pression atmosphérique résiduelle un couple de frottement visqueux $-f\dot{\psi}$.

Le moment d'inertie du satellite sur l'axe de la roue d'inertie est notée I_{pf} .

On a montré en appliquant le théorème du moment cinétique que l'angle ψ varie avec le couple de commande selon la loi :

$$I_{pf}\ddot{\psi} + f\dot{\psi} + k\psi = C_m \tag{2.1}$$

Données numériques :

$$I_{pf} = 0,5 \text{ kg.m}^2$$

$$k = 20 \text{ N.m}$$

$$f = 1,25 \text{ N.m.s}$$

Modélisation

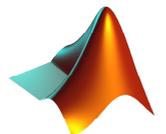
Question 1 : Complétez le schéma de la figure 2.1 pour qu'il modélise le système décrit.

Ouvrez une page Simulink, construisez et simulez le schéma. On mettra une entrée C_m en échelon et on visualisera la sortie ψ .

TRUCS & ASTUCES MATLAB

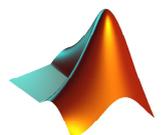
Pour lancer Simulink, on peut soit :

- taper `simulink` en ligne de commande
- File \rightsquigarrow New \rightsquigarrow Model 
- cliquer sur l'icône Simulink



TRUCS & ASTUCES MATLAB

Blocs utiles	Bibliothèques
Intégrateur	Continuous
Sommateur	Math Operations
Entrée échelon	Sources
Scope	Sinks



2.3. Identification

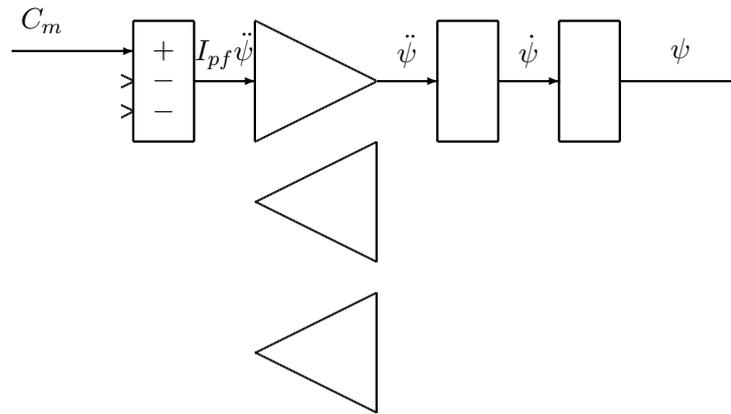


Figure 2.1 – Schéma fonctionnel du système à compléter

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Pour paramétrer les blocs, il est préférable de déclarer les variables (I_{pf} , k , f) dans un fichier .m puis d'utiliser ces noms de variables plutôt que de mettre directement les valeurs numériques.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Pour lancer la simulation, on peut faire Simulation \rightsquigarrow Start ou utiliser l'icône ►

Il est souvent nécessaire d'ajuster le temps de simulation avec Simulation \rightsquigarrow Configuration Parameters.

Question 2 : Relevez sur le scope le gain, le temps de réponse à 5% et le dépassement en %.

Question 3 : A partir de l'équation 2.1, écrire la fonction de transfert du système complet. Insérer dans le schéma précédent un bloc Transfer Fct (bibliothèque Continuous) représentant cette fonction de transfert en lui injectant la même entrée.

2.3 Identification

L'objet de cet exercice est de retrouver la fonction de transfert des systèmes inconnus contenus dans le fichier identification.mdl à partir d'essais bien choisis.

Systèmes simples

Question 1 : Copiez le système inconnu 1 dans une nouvelle page, visualisez la réponse indicielle, relevez ses caractéristiques et déduisez-en les coefficients de la fonction de transfert.

Validez vos résultats en visualisant sur un même Scope la sortie du système inconnu et celle de votre solution.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Pour visualiser plusieurs signaux sur un même scope, utilisez un Mux de la bibliothèque signal

routing.

Question 2 : *Même question avec le système inconnu 2.*

Système plus complexe

Question 3 : *Réalisez un essai indiciel sur le système inconnu 3 et relevez le gain statique.*

Que peut-on dire de l'ordre du système ? (i.e. du degré du dénominateur de la fonction de transfert)

Peut-on modéliser ce système une fonction de transfert du type $\frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$? Pourquoi ?

Question 4 : *Au vu de la réponse indicelle, quelle est l'opération mathématique effectuée de manière prédominante par le système ?*

On suppose que la fonction de transfert est de la forme $H(p) = \frac{K\omega_n^2(1 + \tau p)}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$ avec $0 < \frac{1}{\tau} < \xi\omega_n$

Pour fonder cette "intuition", on prend en compte :

- l'allure oscillante amortie suggère un système du second ordre,
- la réponse à un échelon ressemble à une impulsion de Dirac. Le système a donc un effet dérivatif, ce qui implique la présence d'un zéro d'où le terme en $(1 + \tau p)$,
- Cet effet dérivatif est dominant, la partie réelle de ce zéro est donc supérieure à celle des pôles,
- Enfin, la réponse évolue initialement vers la valeur finale. On sait d'expérience qu'un système avec un zéro positif (système dit à déphasage non-minimal) évolue initialement à l'opposé de sa valeur finale. Le zéro est donc négatif et $\tau > 0$.

Question 5 : *Tracez l'allure du diagramme de Bode du système à partir de la fonction de transfert proposée et des indications sur les relations d'ordre entre les paramètres.*

En supposant que $\frac{1}{\tau} \ll \xi\omega_n$, calculer la phase pour $\omega = \frac{1}{\tau}$ et pour $\omega = \omega_n$.

Question 6 : *Déterminez expérimentalement le gain et la phase pour $\omega \in \{0.01 \ 0.1 \ 100 \ 1000\}$ (rad/s)*

En déduire les valeurs de τ et ω_n

On remarque que la pseudo-pulsation de la réponse temporelle ne dépend pas du numérateur de la fonction de transfert. L'expression établie dans le cas d'un second ordre avec une constante au numérateur reste valable.

Question 7 : *Relevez la pseudo-période de la réponse indicelle. En déduire ξ .*

Vérifiez la validité de l'identification réalisée.

 Etude d'un quadrirotor

Le but de ce TD est de modéliser le quadrirotor représenté sur la figure 1 en vue de simuler son comportement. Cette modélisation sera opérée au moyen du logiciel MATLAB-SIMULINK. Pour mener à bien ce TDAO, vous devez impérativement vous munir du sujet et des résultats du TD1.

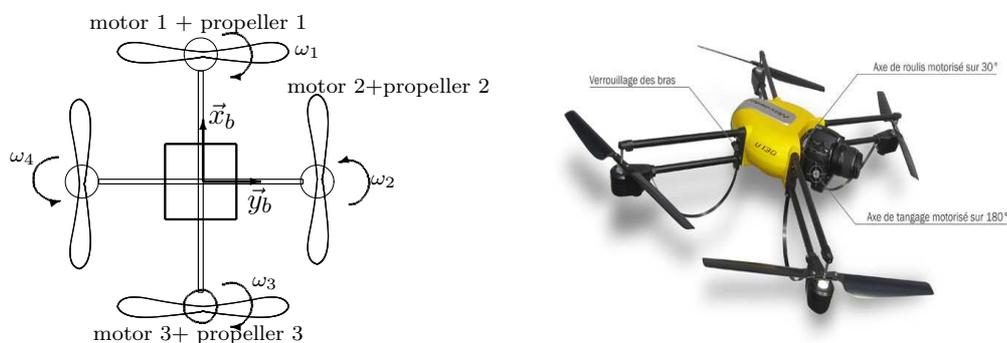


Figure 3.1 – A gauche, vue schématique d'un quadrirotor. A droite, le U130 de Novadem

Ce quadrirotor est un système multivariable qui possède

- quatre entrées : la commande de la poussée δ_x , les commandes des axes de roulis δ_ℓ , de tangage δ_m et de lacet δ_n . Ces commandes sont par exemple générées avec une radiocommande.
- sept sorties : l'angle de gîte ϕ , l'assiette θ , le cap ψ , le roulis p , le tangage q , le lacet r , l'altitude $h = -z$.

Il est muni d'actionneurs et de capteurs, soit :

- quatre moto-réducteurs entrainant les quatre hélices, soit Ω_i où $i = \{1, \dots, 4\}$ leurs vitesses angulaires.

— une centrale inertielle qui mesure $\phi, \theta, \psi, p, q, r$ et un capteur barométrique pour la mesure de h .

— La poussée T est obtenue en commandant simultanément la poussée des quatre moteurs :

$$T = -b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

— Le moment de roulis en commandant un différentiel de poussée entre les moteurs 2 et 4

$$L = bl(-\Omega_2^2 + \Omega_4^2)$$

— Le moment de tangage en commandant un différentiel de poussée entre les moteurs 1 et 3 :

$$M = bl(\Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

— Le moment de lacet en commandant un différentiel entre les moteurs $\{1, 3\}$ et $\{2, 4\}$:

$$N = d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)$$

b et d sont respectivement le coefficient de poussée et de trainée des hélices, l désigne la longueur du bras de levier.

3.1 Modèle de simulation du quadrirotor

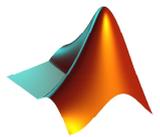
Dans cette première partie, vous allez représenter sous la forme d'un schéma fonctionnel les équations des forces et des moments produits par les hélices du quadrirotor ; puis vous implémenterez ce schéma sous SIMULINK au moyen des composants fournis dans les bibliothèques de ce logiciel.

Question 1 : *Sur papier, donnez un schéma fonctionnel des équations de la poussée, des moments de roulis, de tangage et de lacet produits par les vitesses de rotation des hélices.*

Question 2 : *Exécutez MATLAB puis implémentez ce schéma fonctionnel sous SIMULINK. Pour ce faire, suivez les instruction suivantes :*

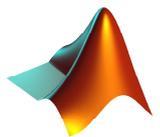
TRUCS & ASTUCES MATLAB

- tapez `simulink` en ligne de commande, soit cliquez sur l'icône SIMULINK .
- ouvrez ensuite une feuille de travail dans laquelle vous représenterez le schéma fonctionnel des forces et des moments : `File ~> New ~> Model`



TRUCS & ASTUCES MATLAB

Utilisez ensuite les composants que vous trouverez dans les différentes bibliothèques et que vous copierez dans la feuille de travail. Au moyen de la souris, vous établirez les connexions entre ces différents composants. Associez aux entrées $\{\Omega_1, \dots, \Omega_4\}$ des composants **Input** et aux sorties $\{T, L, M, N\}$ des composants **Output**.



3.2. Modèle de synthèse

Blocs utiles	Bibliothèques
Sommateur, Product, Gain, ²	Math Operations
Input	Sources
Output	Sinks

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Sauvegardez régulièrement votre schéma File \rightsquigarrow Save As dans un sous-répertoire du répertoire prénom nom associé à votre compte. Les fichiers créés sous SIMULINK ont une extension .mdl. Il est enfin possible d'encapsuler ce schéma dans un sous-système ; avec la souris, sélectionnez le schéma complet, pointez le curseur sur le schéma et faites un clic droit \rightsquigarrow Create a Subsystem. Vous pouvez redimensionner ce sous-système avec la souris. Sauvegardez votre schéma File \rightsquigarrow Save.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Il vous reste à paramétrer ce schéma. Pour ce faire, vous allez créer un fichier MATLAB : File \rightsquigarrow New \rightsquigarrow Script dans lequel vous affecterez des valeurs numériques aux paramètres. $b = 3.13e^{-5}$, $d = 7.5e^{-7}$, $l = 0.21m$, $m = 0.65kg$, on donne également $I_T = 6e^{-3}kgm^2$, le moment d'inertie du quadrirotor autour de l'axe de tangage. Sauvegardez ce fichier (extension .m) dans le même répertoire que précédemment et exécutez-le en cliquant sur l'icône .

Question 3 : Ouvrez le fichier *Model_quadrotor.mdl* et complétez-le avec le sous-système générant la force de poussée et les moments produits par les hélices. **Il peut être nécessaire de recompiler l'un des fichiers constitutifs de ce schéma, pour cela suivez la procédure indiquée dans le fichier *LisezMoi.txt* archivé dans le dossier *Fichiers Matlab/T-DAO3*.** Ce modèle est un modèle de simulation du quadrirotor. Appliquez aux entrées de ce sous-système des échelons (bloc Step dans Sources) qui simulent les vitesses de rotation. Calculez $|\Omega_e|$ la valeur absolue de la vitesse de rotation des hélices à l'équilibre puis paramétrez le bloc Step en le double-cliquant :

Step Time	0
Initial Value	0
Final Value	$\pm\Omega_e$
Sample Time	0

Lancez la simulation sur un horizon de 10s, constatez que vous avez bien atteint un équilibre en observant les angles d'attitude et l'altitude du quadrirotor.

3.2 Modèle de synthèse

Vous allez, d'après une simulation, identifier un *modèle de synthèse* du quadrirotor. On pose $\tilde{M} = 2bl (\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_3) \Omega_e$ le moment de tangage linéarisé et obtenu pour de petites variations de la vitesse des hélices $\tilde{\Omega}$ autour de Ω_e , cf. TD1). Vous allez identifier la fonction de transfert qui lie $\tilde{M}(s)$ à $\tilde{\theta}(s)$, de petites variations de l'assiette autour de l'assiette d'équilibre.

Question 4 : Ramenez l'horizon de simulation à 1 seconde et modifiez la commande autour de l'équilibre de sorte que $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_e - 1$ et $\tilde{\Omega}_3 = \Omega_e + 1$.

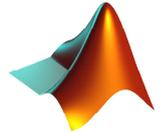
- Etablissez l'expression $\tilde{M}(s)$.
- Observez $q(t)$ sur le Scope, en déduire $\tilde{q}(t)$ et établissez son expression en fonction du temps puis son expression Laplacienne (vous adopterez s pour la variable de Laplace).
- Quelle relation simple lie $\tilde{\theta}(t)$ à $\tilde{q}(t)$. Donnez la transformée de Laplace de cette relation puis $\frac{\tilde{\theta}(s)}{\tilde{M}(s)}$.
- Comparez la fonction de transfert ainsi identifiée à celle trouvée lors du TD.

MATLAB dispose d'outils pour l'étude des performances et le tracé des réponses temporelles, diagrammes et lieux fréquentiels des systèmes linéaires invariants continus.

Question 5 : Depuis la fenêtre de commande Windows ou à la suite du programme `.m`, saisissez la fonction de transfert identifiée infra.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Pour saisir une fonction de transfert, utilisez la fonction `tf` dont la syntaxe est `sys = tf([coefs num], [coefs den])`



Exécutez la fonction `ltview` et importez le système (File \rightsquigarrow Import). Pour analyser le système, faites un clic droit puis choisissez le type d'analyse que vous souhaitez mener.

- **Step response :** comparez la réponse obtenue avec `Ltview` à celle obtenue avec `SIMULINK`. Attention à judicieusement régler la durée de simulation (on rappelle que le modèle de synthèse a été obtenu sous les hypothèses de petites variations autour de l'équilibre).
- **Impulse response :** vérifiez la cohérence de la réponse impulsionnelle relativement à la fonction de transfert $\frac{\tilde{q}(s)}{\tilde{M}(s)}$.
- **Bode :** esquissez sur une feuille de papier le diagramme de Bode asymptotique de $\frac{\tilde{q}(j\omega)}{\tilde{M}(j\omega)}$ et vérifiez votre tracé en le comparant à celui obtenu avec `Ltview`.
- **Nichols :** tracé du lieu de Black.
- **Pole/Zero,** pour le tracé des pôles (\times) et des zéros (\circ) de $\frac{\tilde{\theta}(s)}{\tilde{M}(s)}$.

3.3 Introduction à la commande

Autour de l'axe de tangage, le quadrirotor n'est pas stable. Soumis à une entrée de commande dont l'amplitude et la durée sont bornées, la réponse ne revient pas à l'équilibre. On se propose d'étudier une loi de commande qui permette de stabiliser le quadrirotor tout en contrôlant le temps de réponse et l'amortissement. Cette commande est étudiée avec le modèle de synthèse puis implémentée sur le modèle de simulation. On ne s'intéressera dans la suite qu'au contrôle de l'attitude du quadrirotor, les effets des forces dues à l'action de pesanteur et aux hélices ne sont pas pris en compte. Reprenez les résultats établis à la question 10 du TD et en particulier la fonction de transfert du quadrirotor corrigé.

3.3. Introduction à la commande

Question 6 : Ouvrez une nouvelle feuille de travail sous SIMULINK puis, au moyen de deux intégrateurs et d'un gain, représentez le modèle de synthèse du quadrirotor. Prévoyez une entrée de commande $\tilde{\delta}_m$ (le moment de tangage) et deux sorties pour visualiser $\tilde{\theta}$ et \tilde{q} . Encapsulez ce schéma dans un Subsystem et pensez à le sauvegarder.

Blocs utiles	Bibliothèques
Sommateur, Gain,	Math Operations
Integrator	Continuous
Input	Sources
Output	Sinks

Question 7 : Complétez ce schéma en vue de modéliser le moment de tangage :

$$\tilde{M}(s) = \tilde{\delta}_m(s) - K_\theta \tilde{\theta}(s) - K_q \tilde{q}(s)$$

$\tilde{\delta}_m$ qui représente la commande de l'axe de tangage réalisée par exemple au moyen d'une radio-commande sera modélisé par un échelon unitaire. Vous paramètrerez les gains K_θ et K_q de sorte qu'autour de l'axe de tangage, le quadrirotor se comporte comme un système du second ordre dont le facteur d'amortissement réduit est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le temps de réponse inférieur à 0,5s. Insérez trois oscilloscopes pour mesurer $\tilde{\theta}$, \tilde{q} et M .

Blocs utiles	Bibliothèques
Sommateur, Gain,	Math Operations
Step	Sources
Scope	Sinks

Question 8 : Appliquez pour $\tilde{\delta}_m(t)$ un échelon unitaire et relevez les caractéristiques de la réponse. Que vaut le gain statique du quadrirotor ainsi commandé ? Proposez pour le préfiltre (gain issu de δ_m situé en amont de la boucle) une valeur qui rende le gain du système ainsi commandé unitaire puis simulez-le

Question 9 : Vous allez implémenter la loi de commande synthétisée sur le modèle de simulation (supposé décrire le véritable quadrirotor). Cette question est délicate car la commande utilisée pour la synthèse est un moment \tilde{M} alors que pratiquement, on contrôle $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_3$ les variations de vitesse des moteurs.

- exprimez $\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_3$
- pour garantir un moment de tangage linéaire vis à vis de $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_3$, montrez qu'il faut $\tilde{\Omega}_1 = -\tilde{\Omega}_3$.
- sous SIMULINK, complétez le modèle de synthèse en construisant le sous-système qui lie \tilde{M} à $\tilde{\Omega}_1$ et \tilde{M} à $\tilde{\Omega}_3$.
- implémentez alors la loi de commande dimensionnée avec le modèle de synthèse puis simulez.

Comparez les résultats obtenus avec les deux modèles. Pour cela, vous pouvez copier-coller le modèle de synthèse sur le modèle de simulation.

Dynamique latérale d'un Boeing 747

Le but de ce TD est d'étudier et de contrôler la dynamique latérale d'un avion.

On montre en Mécanique du Vol que la dynamique latérale combine des mouvements sur les axes de roulis et de lacet.

Autour de ces axes, l'avion apparaît comme un système multivariable avec

- deux entrées : la gouverne de direction δ_n et les ailerons δ_l
- deux sorties : le lacet r et l'angle de gîte φ

Avec les connaissances vues jusqu'à présent dans le cours d'Automatique, on ne sait pas commander directement les systèmes multivariables. A défaut, on s'attachera dans un premier temps à réaliser un amortisseur de lacet dont le but sera de réguler la valeur du lacet r autour de 0. Une fois le réglage de l'amortisseur de lacet correctement effectué, on asservira l'angle de gîte. Pour chacune de ces parties, on étudiera successivement le comportement de l'avion en boucle ouverte puis la manière de le commander pour lui donner en boucle fermée un comportement satisfaisant.

La figure 4.1 rappelle la définition et les conventions de signe sur les angles de la dynamique latérale.

4.1 Amortisseur de lacet

Etude de l'avion en boucle ouverte

On donne la fonction de transfert décrivant l'évolution du lacet r en réponse à une action sur la gouverne de direction δ_n

$$\frac{r(p)}{\delta_n(p)} = \frac{-0.475p^3 - 0.2479p^2 - 0.1187p - 0.05633}{p^4 + 0.6358p^3 + 0.9389p^2 + 0.5116p + 0.003674}$$

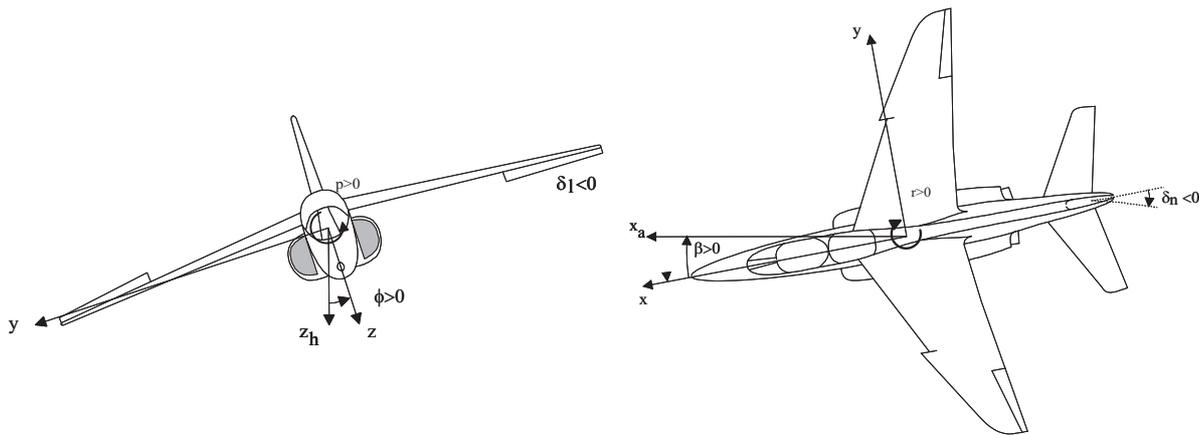


Figure 4.1 – Angles et vitesses de la dynamique latérale : Gîte φ et roulis p - Dérapage β et lacet r

Démarrez MATLAB, déclarez la fonction de transfert et importez-la sous ltiview.

Question 1 : Affichez la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle. Combien de modes sont visibles ? Lequel est dominant ?

A quelles manoeuvres correspondent physiquement ces tests ?

Question 2 : Déterminez très approximativement la constante de temps du sous-système du premier ordre, la pulsation propre non-amortie et le facteur d'amortissement réduit du système du second ordre.

Question 3 : Comment justifiez-vous le fait que la fonction de transfert saisie soit du quatrième ordre alors que la simulation montre qu'un troisième ordre suffit à caractériser la dynamique latérale de l'avion ?

Question 4 : En vous aidant de la carte des pôles et des zéros, mettez la fonction de transfert sous la forme pôles-zéros i.e. $K \frac{\prod(p - z_i)}{\prod(p - p_j)}$.

Régulation du lacet

Les essais précédents montrent qu'à l'évidence l'avion n'est pas suffisamment amorti.

Une solution à cette situation pourrait consister à modifier la géométrie de l'avion pour le rendre moins oscillant. Ce réglage n'est pas réalisable en pratique. On montre en effet en mécanique du vol que le facteur d'amortissement réduit est proportionnel à la racine carré de la surface de la dérive ainsi qu'à la distance entre le centre de gravité et la dérive. Le facteur d'amortissement étant naturellement très faible, le diminuer convenablement par la géométrie de l'avion conduirait à en augmenter.

On préfère introduire une loi de commande de la gouverne de direction δ_n qui contre le mouvement de lacet. Ce dispositif constitue un amortisseur de lacet.

On suppose pour les questions qui suivent que le capteur (gyromètre) restitue une mesure

4.1. Amortisseur de lacet

égale à la grandeur observée. Le capteur est de ce fait modélisé par un gain pur égal à 1.

Pour le calcul de la loi de commande, on utilisera la macro-fonction *sisotool* dédiée à l'étude des systèmes asservis dits *SISO* : Single Input Single Output.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Utilisation de *sisotool* :

1. depuis le Command Window, tapez et exécutez *sisotool*, une fenêtre s'ouvre. La conception de la loi de commande et l'évaluation des performances du système ainsi corrigé s'opèrent en ouvrant successivement les onglets de la gauche vers la droite.
2. L'onglet *Architecture* permet de définir la structure de la boucle à contrôler et les valeurs des différentes fonctions de transfert.
 - bouton *Control Architecture* : vérifiez que la structure sélectionnée est celle désirée, relevez sur le schéma le nom des variables utilisées pour définir les fonctions de transfert et les signaux.
 - bouton *System Data* : allouez les fonctions de transfert dans les champs prévus à cet effet de sorte que la structure de la boucle proposée par *sisotool* soit cohérente avec celle représentée sur la figure 1.2. A ce stade le correcteur $C = 1$. Le bouton *Browse* permet d'importer dans *sisotool* les fonctions de transfert déclarées dans *MATLAB*.
3. L'onglet *Compensator Editor* : C représente le gain statique du correcteur, soit K pour le système étudié. A ce stade, laissez $C = 1$.
Notez qu'il est possible de synthétiser des correcteurs plus sophistiqués en ajoutant des pôles et des zéros.
4. onglet *Graphical Tuning* : dans ce menu, vous choisissez le type de graphique utilisé pour la synthèse du correcteur, la plupart du temps nous utiliserons le lieu des racines et le lieu de Black-Nichols.
 - *plot1* : choisissez *root locus*
 - *plot2* : choisissez *nichols*Cliquez ensuite sur le bouton *Show design plot*. Pour les différents graphiques, cliquez droit \rightsquigarrow *grid*.
5. onglet *Analysis Plot* : pour afficher une réponse indicielle correspondant au réglage effectué :
 - sélectionnez *Plot type : step*
 - cochez *closed loop r to y*
 - bouton *Analysis plot*

Question 5 : A partir de la fonction de transfert reformulée à la question 4, vérifiez que le lieu d'Evans tracé sous *sisotool* est cohérent avec les règles de tracé édictées en cours i.e. les points de départ et d'arrivée, les asymptotes et les points appartenant à l'axe réel du lieu d'Evans pour un correcteur $C(p) = C$ avec $C > 0$ puis $C < 0$.

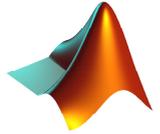
Les règles de construction vues en cours sont insuffisantes pour tracer complètement les lieux d'Evans à la main (il faudrait notamment les angles de départ et d'arrivée).

Question 6 : Affichez avec *sisotool* le lieu d'Evans pour $C > 0$ puis pour $C < 0$. Que peut-on dire de la stabilité dans chaque cas ?

Peut-on retrouver ce résultat par des considérations physiques ?

TRUCS & ASTUCES MATLAB

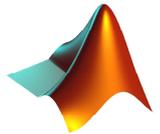
sisotool trace par défaut le lieu d'Evans pour un correcteur positif. Pour obtenir le tracé correspondant à un gain négatif, il faut insérer une valeur négative dans le champ Current Compensator C(p)



Question 7 : *Proposer au moyen de sisotool un réglage du gain qui permette de maximiser le facteur d'amortissement réduit et par là-même le confort des passagers.*

TRUCS & ASTUCES MATLAB

En cliquant sur le carré rose figurant le pôle en boucle fermée pour le réglage courant du correcteur, on peut directement lire en bas de la fenêtre la valeur du pôle. Pour les pôles complexes conjugués, on a aussi les caractéristiques du mode correspondant :



- damping : ξ
- natural frequency : ω_n

Question 8 : *Evaluez sous sisotool la réponse impulsionnelle du système ainsi corrigé.*

Dans l'espace de votre promotion sur le site EEE, copiez le répertoire Fichiers Matlab, décompressez-le dans le répertoire $D : \backslash mon_nom$. Positionnez le chemin de Matlab sous le répertoire tdao4 puis ouvrez et exécutez le fichier Boeing747lacet.m qui initialise les données du modèle et ouvre la fenêtre SIMULINK.

Remarque : Pour mettre en évidence l'intérêt de l'amortisseur de lacet, à l'instant initial, l'angle de dérapage est différent de zéro. Cette valeur du dérapage est déjà programmée.

Question 9 : *Complétez le schéma pour insérer le modèle de l'avion dans une boucle de régulation avec le correcteur synthétisé précédemment.*

Quelle valeur doit-on donner à la consigne de lacet ?

4.2 Asservissement de l'angle de gîte

Pratiquement, on commande le taux de virage d'un avion au travers de la commande de son angle de gîte.

On étudiera l'avion muni de l'amortisseur de lacet synthétisé dans les questions précédentes.

Etude de la boucle ouverte

Exécutez le fichier Boeing747gite.m. Après initialisation de certaines données, une fenêtre SIMULINK s'ouvre dans laquelle figure le modèle d'un avion commandé par les ailerons et dont la sortie est l'angle de gîte φ . Le modèle intègre l'amortisseur de lacet dont il suffit de régler le correcteur. Pour ce faire, double-cliquez sur la figure et renseignez la valeur du gain trouvée à la question 7.

Question 10 : *Sur le modèle de simulation, appliquez un échelon de commande de braquage des ailerons de quelque degrés (à traduire en radians), observez l'angle de gîte et déduisez-en le gain*

4.2. Asservissement de l'angle de gîte

statique de la fonction de transfert $\frac{\phi(p)}{\delta_i(p)}$.

Asservissement de l'angle de gîte

Question 11 : *Construisez une boucle d'asservissement de l'angle de gîte dans laquelle vous insérerez une correction proportionnelle.*

Question 12 : *Déterminez la valeur du gain telle que l'erreur de gîte soit inférieure à 5%. Observez la gîte, l'erreur et l'angle de braquage des gouvernes. Modifiez la valeur du gain afin de visualiser le compromis stabilité-précision.*

Question 13 : *Testez ce réglage sans l'amortisseur de lacet. Pour ce faire, double-cliquez à nouveau sur le bloc modélisant l'avion et portez à 0 la valeur du gain de l'amortisseur de lacet puis relancez la simulation.*

Étude d'une automanette

Présentation

Ce TDAO a pour objet l'étude d'une automanette. L'automanette étant un mode du pilote automatique qui permet l'acquisition et la tenue d'une vitesse indiquée. Le schéma fonctionnel de l'automanette est représenté sur la figure 5.1 :

Les notations utilisées :

ΔU_c	Consigne de variation de la vitesse avion/air	$\Delta \Gamma$	Variation pente
ΔU_a	Mesure de la variation de la vitesse avion/air	V_w	Vitesse vent/sol
ΔV_a	Variation effective de la vitesse avion/air	m	Masse de l'avion (8160 kg)
ΔV_s	Variation de la vitesse avion/sol	g	Pesanteur (10 m/s^2)

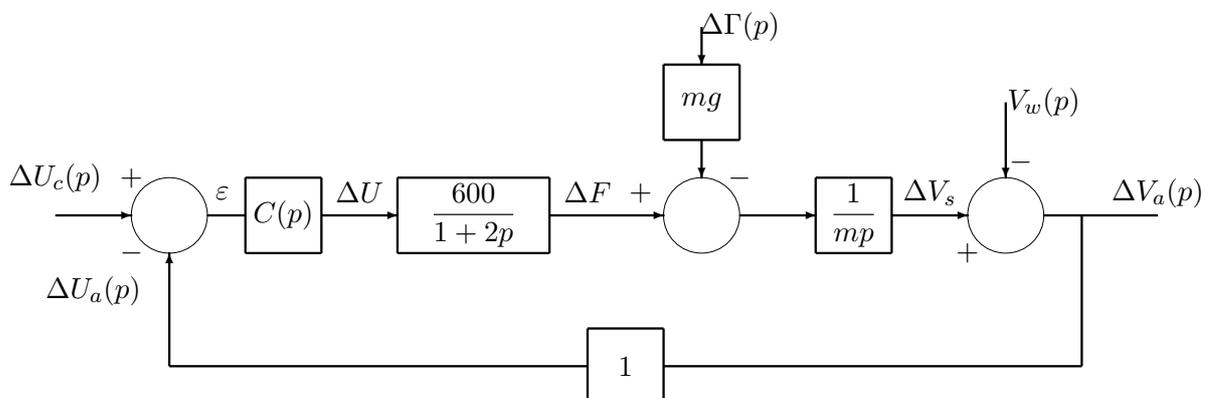


Figure 5.1 – Le schéma fonctionnel de l'automanette

5.1 Correction proportionnelle unitaire $C(p) = 3,47$

Réponse à une consigne

Question 1 : Réalisez sous Simulink le schéma fonctionnel de l'automanette.

Question 2 : Les perturbations étant supposées toutes nulles, calculez la fonction de transfert en boucle ouverte du système et saisissez-la. Sous *sisotool*, tracez les lieux d'Evans pour $K < 0$ et $K > 0$ et retrouvez le signe que doit avoir le gain pour que le système en boucle fermée soit stable. Réglez et relevez la valeur du gain pour laquelle le facteur d'amortissement réduit $\xi = 0.707$. Relevez également ω_n .

Question 3 : Avec la valeur du gain trouvée à la question précédente, sur le lieu de Black-Nichols, visualisez et relevez les marges de stabilité ainsi que le gain statique de l'automanette en boucle fermée.

Déduisez-en la valeur de $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V_a(t)$ en réponse à un échelon.

Question 4 : Sur le schéma *SIMULINK* de l'automanette, implémentez le gain du correcteur trouvé à la question 2. Lorsque ΔU_c est un échelon d'amplitude $\Delta U_c = 1m/s$, les autres entrées étant nulles, visualisez $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V_a(t)$, en déduire le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée et vérifiez que sa valeur est cohérente avec celle trouvée à la question précédente. Visualisez également l'erreur permanente $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$. Sans faire de calcul, ce résultat était-il prévisible ?

Réponse aux perturbations

Question 5 : Lorsque $\Delta \Gamma$ est un échelon d'amplitude $\Delta \Gamma_0 = 0,017rad$, les autres entrées étant nulles, visualisez $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta V_a(t)$. Ce résultat était-il prévisible ?

Concluez sur la qualité de la boucle de régulation.

5.2 Correction proportionnelle-intégrale

On envisage maintenant un correcteur proportionnel-intégral. On remplace donc K par un bloc de fonction de transfert $K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$.

On rappelle les résultats du TD : $K = 3,47$ et $T_i = 28.5$

Question 6 : Tracez le diagramme de Black de la FTBO corrigée. Mettez en évidence l'influence du correcteur sur le diagramme de Black

Question 7 : Concluez sur la qualité de la régulation, en simulant simultanément une variation de pente et une variation de vitesse du vent.

Question 8 : On examine les conséquences d'une erreur de synthèse du correcteur. En supposant

5.3. Correction à avance de phase

qu'on ait (à tort) choisi le paramètre $T_i = \frac{1}{\omega_i}$ tel que $\omega_i = 10\omega_{0dB}$, on aurait $T_i = 0,22s$ avec ω_{0dB} telle que $|FTBO(\omega_{0dB})|_{dB} = 0dB$.

Visualisez les conséquences de ce choix malheureux avec *sisotool* sur le lieux de Black ainsi que sur la réponse temporelle à un échelon.

5.3 Correction à avance de phase

Une alternative au correcteur proportionnel-intégral qui annule les erreurs est d'augmenter le gain K pour les ramener à des valeurs acceptables. On insère ensuite un correcteur à avance de phase pour restaurer la stabilité dégradée par l'ajout de gain. Le correcteur utilisé est donc finalement

$$C_{aPh}(p) = K' \frac{1 + \alpha\tau p}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad \alpha > 1$$

On rappelle qu'on avait déterminé $K' = 34,7$ pour limiter les erreurs à des valeurs acceptables et qu'un dimensionnement grossier avait conduit à $\alpha = 8,4$ et $\tau = 0,34$

Question 9 : *Construisez dans votre schéma Simulink le correcteur à avance de phase et testez-le pour une entrée en consigne et des entrées en perturbations.*

Question 10 : *Affichez sur la même figure les diagrammes de Black de la FTBO non corrigée, corrigée avec un simple gain K' et corrigée avec le correcteur à avance de phase. Visualisez l'effet de ce dernier.*

Question 11 : *On souhaite encore diminuer les erreurs et on double à cet effet le gain K' . A l'aide de *sisotool*, déterminez la dégradation de la marge de phase et modifiez le réglage du correcteur pour atteindre une marge de phase $M_\varphi = 60^\circ$.*

Estimation de position d'un satellite par filtrage de Kalman

But de ce TD/TDAO :

- *Sur papier* : vous faire écrire la formulation d'un filtre de Kalman dans le cas un cas simple. En formulation continue, on se limite le plus souvent à la solution stationnaire (A savoir faire seul...). Le système étudié est ici d'ordre 1, ce qui permet facilement de résoudre l'équation de Riccati et obtenir le gain de l'observateur de Kalman non stationnaire.
- *Sur ordinateur* : simuler le modèle et son observateur et comprendre le comportement du filtre de Kalman au travers de l'influence de la fiabilité des conditions initiales, du niveau des bruits d'état et de mesure.

Exposé du problème

On modélise le corps d'un satellite comme un cylindre d'axe (O, \vec{x}) . On dispose d'un gyromètre et d'un capteur stellaire qui fournissent respectivement sa vitesse angulaire ω_{mes} et sa position θ_{mes} dans un repère fixe dans l'espace.

Ces deux sources d'information étant imparfaites, on souhaite les fusionner pour obtenir l'estimation $\hat{\theta}$ de sa position angulaire θ qui minimise l'erreur d'estimation.

Modélisation des défauts

La vitesse délivrée par le gyromètre est $\omega_{mes} = \omega + n_\omega$ avec

- ω est la vitesse de rotation réelle du satellite.
- n_ω est un bruit blanc, gaussien, centré, de variance σ_ω^2

La position angulaire délivrée par le capteur stellaire est $\theta_{mes} = \theta + n_\theta$ avec

- θ est la position angulaire réelle du satellite.
- n_θ est un bruit blanc, gaussien, centré, de variance σ_θ^2

6.1 Formulation du filtre

Question 1 : *Quels sont les état, entrée et sortie du système ? Ecrire son modèle sous forme de représentation d'état en faisant bien apparaître les vecteurs contenant des éléments d'incertitude.*

Identifier les matrices traditionnellement appelées A, B, C, D, Q, R

On construit un filtre de Kalman chargé de fournir une estimation $\hat{\theta}$ de la position θ à partir de la vitesse mesurée u et de la position mesurée Y . On note $\varepsilon = \theta - \hat{\theta}$ l'erreur d'estimation et $P = E[\varepsilon\varepsilon^T]$ la covariance de l'erreur d'estimation. On rappelle que par construction, le filtre de Kalman est l'observateur qui minimise $Tr(P)$ c'est-à-dire ici ε^2 . Autrement dit, c'est la meilleure estimation possible à laquelle on peut accéder étant donnée la qualité des informations disponibles.

Question 2 : *Rappeler les équations d'état d'un observateur et faire le schéma fonctionnel du système complet (Satellite - Observateur).*

Question 3 : *Ecrire et résoudre l'équation de Riccati vérifiée par P . En déduire l'expression du filtre de Kalman $L(t)$.*

On écrira les constantes d'intégration en fonction de $P(0)$

On "rappelle" la méthode de résolution d'une équation de Riccati : poser $P = y + \tilde{P}$ où \tilde{P} est une solution particulière. On tombe sur une équation de Bernoulli du type $\dot{y} = a(t)y^\alpha + b(t)y$ pour laquelle on pose $z = y^{1-\alpha}$ ce qui mène à une équation linéaire du premier ordre en z que l'on doit savoir résoudre.

Indication : les solutions particulières simples sont constantes. Il y a deux constantes de signe opposés possibles. Comme on veut la solution positive, on partira avec la solution constante positive

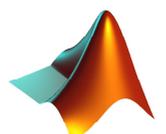
6.2 Simulation

Copier dans un répertoire local le répertoire `fdK` dans votre espace promotion. Exécuter le programme `initDonnees.m` qui définit les variables utiles et ouvre le schéma Simulink contenant le modèle du satellite. Les défauts des capteurs sont caractérisés par les variables définies. Dans la pratique, on n'est pas censé les connaître et il faut tout d'abord essayer de quantifier ces défauts.

Caractérisation des capteurs au sol

On suppose disposer d'installation d'essais étalonnées avant le lancement du satellite. On peut ainsi connaître les valeurs réelles de la vitesse et de la position ainsi que les celles délivrées par les capteurs.

Question 4 : *Enregistrer les erreurs de mesures de vitesse et de position sur un temps assez long (de quelques milliers de secondes). En appliquant la définition de la covariance des bruits d'état et de mesure, retrouver les paramètres σ_ω et σ_θ qui permettront de régler le filtre de Kalman.*



6.2. Simulation

TRUCS & ASTUCES MATLAB

On rappelle que l'on peut exporter les données d'un objet `Scope` en cochant la case `Save data to Workspace` dans l'onglet `Data history` de la fenêtre de paramètres du `Scope`. On accède à la matrice des données en faisant `nomVariable.signals.value`

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Utiliser la commande `.*` pour multiplier deux matrices de même dimension terme à terme

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Utiliser la commande `mean` pour calculer la moyenne des termes d'une matrice (consulter l'aide)

TRUCS & ASTUCES MATLAB

On sera fréquemment amené à calculer la covariance d'un signal contenu dans un vecteur. C'est l'occasion d'écrire une fonction Matlab. Dans une page vierge de l'éditeur, la première ligne active doit être `function Resultat = NomFonction(paramètres)`

Attention, les variables ne sont *a priori* pas globales : dans une fonction on ne connaît que les variables passées en paramètre

Estimation de la position

On sait donc caractériser les bruits des capteurs de notre satellite. On a dû retrouver les variances de bruits qui ont servi à construire les signaux et définis dans `initDonnees.m`

On suppose désormais le satellite dans l'espace et on ne dispose plus des grandeurs réelles de la vitesse et de la position pour estimer la position. Ces sorties ne nous serviront plus que de référence pour évaluer les performances de nos estimateurs.

Question 5 : *Intégrer directement la vitesse de rotation. Comparer la position ainsi estimée et la position réelle. Visualiser la différence, calculer la moyenne du carré des erreurs d'estimation (ie la covariance d'erreur d'estimation statistique) et conclure sur la qualité de cette estimation.*

En l'absence de toute mesure de position, on initialise arbitrairement la position estimée (Par exemple $\hat{\theta}_0 = 0$).

Question 6 : *Construire le filtre de Kalman étudié dans la partie théorique.*

Vous trouverez dans le fichier `gainFdK.mdl` un bloc Simulink dans lequel le calcul du gain du filtre est déjà construit. Les trois dernières entrées sont les paramètres de réglage (utiliser des constantes).

Pour l'intégrateur du filtre, on prendra une valeur initiale externe.

Influence de la fiabilité de l'état initial

Question 7 : *On suppose bien connaître les bruits d'état et de mesure et on a réglé le filtre en conséquence.*

Faute de connaissance sur la position, on initialise arbitrairement la position initiale à $\hat{\theta}_0 = 0$. On sait cependant que le satellite peut avoir une position initiale de l'ordre de $\pm 15^\circ$. Proposer un

TDAO 6. Estimation de position d'un satellite par filtrage de Kalman

réglage de P_0 et lancer une simulation avec ce réglage. Calculer la covariance d'erreur statistique et observer les évolutions de $P(t)$ et $L(t)$.

Question 8 : Plutôt qu'initialiser arbitrairement à 0, on utilise la mesure délivrée par le capteur de position à $t = 0$. On a $\hat{\theta}_0 = \theta_{mes_0} = 5^\circ$. Que peut-on dire de la fiabilité de cette initialisation ? Comment faut-il alors modifier le réglage P_0 ?

Refaire une simulation avec la bonne initialisation et le nouveau réglage de P_0 .

Relever les mêmes éléments que dans la question 7. Commenter.

Influence des bruits d'état et de mesure

Question 9 : D'après les expressions analytiques de la première partie, donner les valeurs stationnaires de P et L en fonction des paramètres de réglage. Commenter.

On gardera désormais l'initialisation $\theta_0 = 5^\circ$ et la covariance d'erreur d'estimation initiale égale à celle déterminée à la question 8.

Question 10 : Dégrader la qualité de l'information de vitesse. Adapter le réglage du filtre et refaire une simulation dans ces conditions. Relever et exploiter les mêmes données que précédemment.

La variance du bruit sur la vitesse est calculée dans `InitDonnees.m` à partir de l'erreur maximale (Définition à 3σ). C'est cette valeur qu'il convient de modifier. Il n'y a pas d'autres modifications à faire si les réglages du filtre sont spécifiés en utilisant les variables du problème (`varWSat` et `varTSat`).

Question 11 : Dégrader dans la même proportion la qualité de l'information de position. Adapter le réglage du filtre et refaire une simulation dans ces conditions. Relever et exploiter les mêmes données que précédemment.

 Commande d'un quadrirotor

Pendant cette séance de TD assisté par ordinateur, on vous propose de dimensionner une loi de commande pour l'axe de tangage du quadrirotor étudié lors des séances de TD1 et de TDAO1. A cette occasion, on a établi l'expression de la fonction de transfert qui lie $\tilde{\theta}(s)$, les

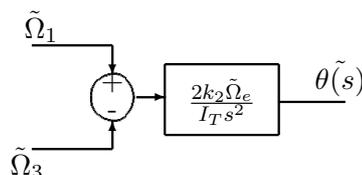


Figure 7.1 – Schéma fonctionnel du quadrirotor pour l'axe de tangage

variations de l'assiette autour de sa position d'équilibre (ici zéro), au moment de tangage $\tilde{M}(s)$ résultant du différentiel de vitesse de rotation des hélices 1 et 3. Soit :

$$\frac{\tilde{\theta}(s)}{\tilde{M}(s)} = \frac{1}{I_T s^2}$$

avec

$$\tilde{M}(s) = 2k_2 \left(\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_3 \right) \Omega_e$$

On a d'autre part établi que pour un angle d'assiette initial nul :

$$\tilde{q}(s) = s\tilde{\theta}(s)$$

Ainsi, dans l'état, et comme cela est illustré sur la figure, $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_3$ sont les commandes du quadrirotor. Comme on vient de le rappeler, ces dernières produisent le moment de tangage $\tilde{M}(s)$ mais aussi les variations de poussée \tilde{T} . Cependant, si l'on dispose d'une radiocommande (RC), il est plus judicieux d'associer une voie à la commande des gaz δ_T et une voie à la commande

de l'axe de tangage δ_m plutôt qu'à la commande de chacune des hélices (1 et 3). On est alors amené à définir ces deux signaux de commande comme suit :

$$\begin{aligned}\delta_m &= \tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_3 \\ \delta_T &= \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_3\end{aligned}$$

Question 1 : Modifiez le schéma fonctionnel de la figure 1 pour faire apparaître les entrées de commande δ_m et δ_T .

Pratiquement, $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_3$ procèdent de la rotation de moteurs à courants continus asservis en vitesse. Ces asservissements ont les caractéristiques suivantes :

- La boucle d'asservissement en vitesse est beaucoup plus rapide que les autres sous-systèmes constitutifs du quadrirotor.
- Le gain statique de cet boucle d'asservissement est unitaire.

Question 2 : Sur le schéma fonctionnel, indiquez où figurent les sous-systèmes moteurs asservis en vitesse et définissez leur fonction de transfert.

Dans la question qui suit, vous allez utiliser la fonction `sisotool` dédiée, dans le cas de systèmes asservis mono-entrée, mono-sortie, à la synthèse de correcteurs dans le domaine fréquentiel (Bode, Black-Nichols) ou à l'aide du lieu d'Evans (root locus). Cette fonction autorise également l'évaluation des performances des lois de commande synthétisées dans le domaine temporel.

Question 3 :

- Calculez la fonction de transfert en boucle ouverte $\frac{\tilde{\theta}(s)}{\delta_m(s)_{\delta_T=0}}$.
- Le quadrirotor vole en stationnaire, comment interprétez-vous physiquement $\delta_T = 0$?
- On donne $I_T = 6e^{-3} \text{kg.m}^2$, $\Omega_e = 225 \text{rad.s}^{-1}$, $k_2 = 6.573e-6$. Saisissez cette fonction de transfert sous MATLAB.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

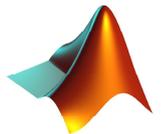
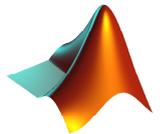
Pour saisir une fonction de transfert, utilisez la fonction `tf` dont la syntaxe est `sys = tf([coefs num], [coefs den])`

Pour le calcul de la loi de commande, on utilise la macro-fonction `sisotool`.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Utilisation de `sisotool` :

- se lance en exécutant `sisotool` dans la fenêtre de commande ou un fichier en `.m`
- une fenêtre s'ouvre dans laquelle apparaît le bouton `control architecture`, cliquez et choisissez un type de structure de système asservi. On peut également changer le signe de la boucle de retour.
- cliquez sur `system data` pour importer les fonctions de transfert des sous-systèmes que vous allouerez eu égard à la structure retenue. Pour le moment, le correcteur n'est pas défini, vous laisserez donc $C = 1$.



- depuis la fenêtre de `sisotool`, cliquez sur l'onglet `graphical tuning` et dans les menus déroulants, sélectionnez les types de représentation avec lesquels vous souhaitez synthétiser la loi de commande. Par exemple `nichols` pour le tracé du lieu de Black de la boucle ouverte, puis cliquez sur le bouton `show design plot`.
- depuis la fenêtre de `sisotool`, cliquez sur l'onglet `compensator editor` où vous pourrez modifier les paramètres du correcteur.
- enfin, en retournant sur la fenêtre de `sisotool`, cliquez sur l'onglet `analysis plot` pour le tracé de la réponse aux signaux types. Il est possible de tracer les réponses aux différentes entrées : consigne, perturbation, bruit de mesure. Dans le cas présent, on se contentera d'une réponse indicielle à la consigne (closed loop r to y). Cliquez sur le bouton `show analysis plot` pour visualiser les résultats.

Question 4 : Avec `sisotool`, visualisez le lieu de Black-Nichols de la fonction de transfert non corrigée puis, pour chacune des stratégies de commande suivantes ébauchez le lieu de Black-Nichols de la fonction de transfert corrigée et dites si le correcteur étudié permettrait de contrôler le quadrirotor.

- *proportionnel*
- *proportionnel intégral*
- *proportionnel dérivé*
- *à avance de phase*

On désire conférer à ce quadrirotor, pour la commande de l'axe de tangage en boucle fermée, un comportement du type de celui d'un système du second ordre dominant avec un facteur d'amortissement égal à 0,707. Pour ce faire, le lieu de Black de la boucle ouverte corrigée doit tangenter l'isogain $0dB$ (ce qui traduit le fait que le facteur de surtension en boucle fermée est nul, ce qui revient à dire que le facteur d'amortissement vaut 0,707). A priori, le correcteur le mieux adapté serait le correcteur à avance de phase dont on rappelle que la fonction de transfert a pour expression :

$$C_{AP}(s) = k \frac{\alpha\tau s + 1}{\tau s + 1}$$

et dont le diagramme de Bode est représenté sur la figure

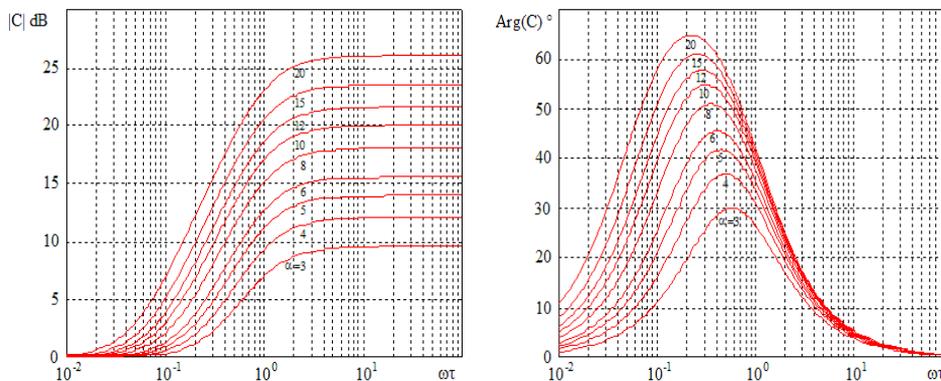


Figure 7.2 – Diagramme de Bode du correcteur à avance de phase

Question 5 :

- D'après le lieu de Black de la FTBO non corrigée et les abaqes du correcteur à avance (CAP) de phase jointes, définissez la valeur de α qui confère l'avance de phase suffisante au contournement de l'isogain 0dB
- Calculez la valeur de la constante de temps τ pour laquelle se produit l'avance de phase maximale. Pour ce calcul, vous devez tenir compte de l'incrément de gain apporté par le correcteur.
- le gain k sera réglé au moyen de *sisotool*.

Question 6 : Saisissez sous Matlab la fonction de transfert de ce correcteur , tracez avec *sisotool* le lieu de Black de la FTBO corrigée et la réponse indicielle. Eventuellement, affinez les réglages en utilisant le tracé du lieu des racines (root locus) et critiquez les performances obtenues.

Question 7 : Sous SIMULINK, ouvrez le fichier *Model_quadrotor1.mdl*. Ouvrez le fichier *Model_quadrotor.mdl* et complétez-le avec le sous-système générant la force de poussée et les moments produits par les hélices. **Il peut être nécessaire de recompiler l'un des fichiers constitutifs de ce schéma, pour cela suivez la procédure indiquée dans le fichier *LisezMoi.txt* archivé dans le dossier *Fichiers Matlab/TDAO6*.** Ce modèle, dit de simulation, se veut réaliste, il tient notamment compte des effets nonlinéaires dus aux hélices. Implémentez sur ce modèle la commande de l'axe de tangage obtenue avec le modèle linéaire et testez-la.

Il est possible d'accroître les performances de l'asservissement en tangage en mettant en œuvre un retour tachymétrique de gain a . Pour ce faire, on admet que le quadrirotor est équipé d'un gyromètre qui mesure les variations de tangage $\tilde{q}(t)$. La structure de la loi de commande proposée est représentée sur la figure.

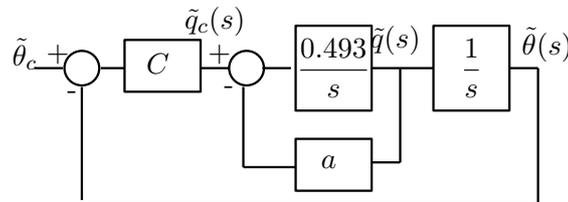


Figure 7.3 – Schéma fonctionnel de la commande de l'axe de tangage avec retour tachymétrique

Question 8 : Calculez $\frac{\tilde{q}(s)}{\tilde{q}_c(s)}$ et mettez cette fonction de transfert sous la forme

$$\frac{\tilde{q}(s)}{\tilde{q}_c(s)} = \frac{G}{Ts + 1}$$

Question 9 : Calculez $\frac{\tilde{\theta}(s)}{\tilde{\theta}_c(s)}$ et montrez qu'un correcteur proportionnel de gain C permet de conférer au quadrirotor un comportement du type de celui d'un second ordre dont le réglage de la pulsation propre est défini par C et celui du facteur d'amortissement réduit est défini par a .

Question 10 : *Utilisez sisotool pour mettre en évidence les effets de ces réglages sur la FTBO corrigée, le lieu des pôles et la réponse indicielle.*

Question 11 : *Justifiez qualitativement que le retour tachymétrique permet de mieux amortir le comportement du quadrirotor.*

Question 12 : *Implémentez ce correcteur sur le modèle de simulation du quadrirotor.*

Étude d'un moteur brushless

Lors de cette séance de TP, vous allez successivement étudier les caractéristiques statiques et dynamiques d'un moteur *brushless* puis mettre en œuvre une loi de commande visant à améliorer ses performances. Le moteur étudié entraîne les hélices de l'hexa-coptère (aéronef à voilure tournante équipé de six rotors) représenté sur la figure 8.1.



Figure 8.1 – L'hexa-coptère

8.1 Relevé de la caractéristique statique

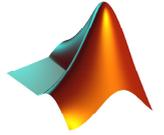
Question 1 : *Sous EEE et depuis le dossier Automatique localisé dans votre espace de promotion, copiez sous D : \mon_nom le fichier brushless.mdl. Ce modèle du moteur est un modèle de simulation.*

Appliquez à l'entrée de commande N un signal constant dont vous ferez varier successivement la valeur entre 0 et 250 par pas de 25. Comme on s'intéresse au régime statique, vous relèverez la valeur de la vitesse ω en régime permanent.

Relever les valeurs de N et de ω dans un tableau et visualiser la caractéristique statique

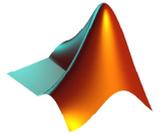
TRUCS & ASTUCES MATLAB

On peut afficher la valeur numérique d'un signal en utilisant le bloc *display* dans la bibliothèque *Sinks* de SIMULINK.



TRUCS & ASTUCES MATLAB

Un tableau est en fait une matrice. Si l'on nomme M cette matrice, on accède à sa première colonne en tapant et exécutant $M(:,1)$, à la deuxième en tapant et exécutant $M(:,2)$, à la première ligne en tapant et exécutant $M(1,:)$, etc. La fonction $plot(M(:,1),M(:,2))$ affiche en coordonnées cartésiennes sur l'axe des abscisses les points de la première colonne de M , sur l'axe des ordonnées les points de la deuxième colonne de M .

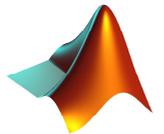


La poussée produite par une hélice est liée à la vitesse de rotation d'une hélice par la relation : $T = b\omega^2$. Pour l'hélice étudiée, $b = 1.416 * 10^{-5} N s^2$, par ailleurs, la masse m de l'hexacoptère est égale à $1.5 kg$.

Question 2 : Le vol stationnaire correspond à une situation d'équilibre. Calculez la vitesse d'équilibre d'un moteur et porter sur la caractéristique statique le point d'équilibre $\{N_e, \omega_e\}$.

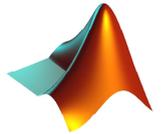
TRUCS & ASTUCES MATLAB

Sur une même figure, vous pouvez superposer plusieurs tracés en exécutant préalablement la fonction *hold on*.



TRUCS & ASTUCES MATLAB

Pour tracer un point de coordonnées (x, y) , repéré par une croix, taper et exécuter $plot(x,y,'+')$.



Question 3 : Que représente la tangente au point d'équilibre ?

8.2 Caractéristique dynamique

Question 4 : Appliquer à l'entrée du moteur brushless une commande $N = N_e$, ajouter à ce signal un échelon d'amplitude égale à environ 10% de N_e et relever la réponse indicielle¹.

1. Il n'est pas possible de faire le relevé des coordonnées d'un point sur le Scope. On peut toutefois imprimer ces courbes sur une figure en suivant cette procédure :

1. double-cliquez sur le scope qui affiche le signal que vous voulez traiter,
2. cliquez sur l'icône *Parameters* \rightsquigarrow onglet *History*
3. décochez la case *Limit data point to last*
4. cochez la case *Save data to workspace*
5. donnez un nom explicite à la variable, par exemple *out* et choisissez le format *Array*, validez
6. relancez la simulation
7. *out* est un tableau accessible depuis le *Command Window* dont la première colonne est le temps,

8.3. Correction

Question 5 : Identifier cette réponse en utilisant la méthode de Broida décrite dans la dernière partie du sujet. Attention à ce que le Step Time de l'échelon soit réglé à zéro.

La réponse indicielle met en évidence la présence d'un retard. La fonction de transfert d'un retard est écrite au moyen de l'approximation de Pade (cf. Annexe C.2 du livre de cours), on montre que

$$e^{-Rp} \approx \frac{1 - \frac{R}{2}p}{1 + \frac{R}{2}p}$$

Question 6 : Réécrire l'expression de la fonction de transfert du moteur en utilisant l'approximation de Pade. Cette fonction de transfert est le modèle de synthèse du moteur.

- Calculer les pôles et les zéros de cette fonction de transfert.
- Quelle est la classe du moteur ?

8.3 Correction

Question 7 : Le moteur et sa carte de contrôle sont implémentés dans une boucle d'asservissement à retour unitaire. Le signal de commande N est généré par un correcteur à partir du signal d'erreur. Représenter sous **SIMULINK** le schéma fonctionnel de cette boucle d'asservissement.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Pour copier un modèle représenté sous **SIMULINK** dans Word, Edit \rightsquigarrow Copy Model to Clipboard \rightsquigarrow clic-droit \rightsquigarrow Paste.

Question 8 : Saisir la fonction de transfert du moteur brushless sous **MATLAB**, au moyen de **sisotool** vous synthétiserez un correcteur qui confère à ce moteur les performances suivantes :

- erreur de position nulle,
- dépassement $\leq 5\%$,
- on ne cherche pas nécessairement à améliorer la rapidité, en effet, le contrôleur qui pilote le moteur n'est pas réversible en courant et il n'est pas possible d'accroître la rapidité lors des phases de décélération

Vous effectuerez le réglage de ce correcteur dans **Black** en utilisant les abaques de **Nichols**. Il est impératif que vous commentiez la démarche suivie. Pour vous aider et au vu des spécifications demandées, vous pouvez, pour trouver et régler ce correcteur, répondre à ces questions :

- Quel type d'effet correcteur faut-il nécessairement introduire pour tenir la spécification sur la précision ?
- Que vaut le gain statique en boucle fermée si l'erreur de position est nulle ?
- Comment traduire un dépassement $\leq 5\%$ en terme de facteur d'amortissement ?
- Un système qui possède un tel facteur d'amortissement est-il résonant.

les colonnes suivantes sont les valeurs prises par les signaux appliqués au Scope. La commande `plot(out(:,1),out(:,2))` permet d'afficher le premier signal.

- Pourquoi le lieu de Black de la boucle ouverte du système ainsi corrigé doit-il tangenter l'isogain 0dB ?

Question 9 : Implémenter la commande synthétisée sous sisotool sur le modèle de simulation.

- Appliquer un échelon de consigne ayant pour valeur initiale la vitesse d'équilibre ω_e et pour valeur finale un incrément égal à 10% de cette valeur.
- Relever les signaux suivants : erreur, commande, vitesse.
- Commenter les résultats obtenus.

8.4 Méthode de Broïda

Le modèle proposé par Broïda pour la réponse à un échelon d'amplitude e_0 d'un système de la forme de celle présentée sur la figure 8.2 s'écrit :

$$\frac{S(p)}{U(p)} = \frac{K e^{-Rp}}{\tau p + 1}$$

Réponse indicielle à un échelon unitaire

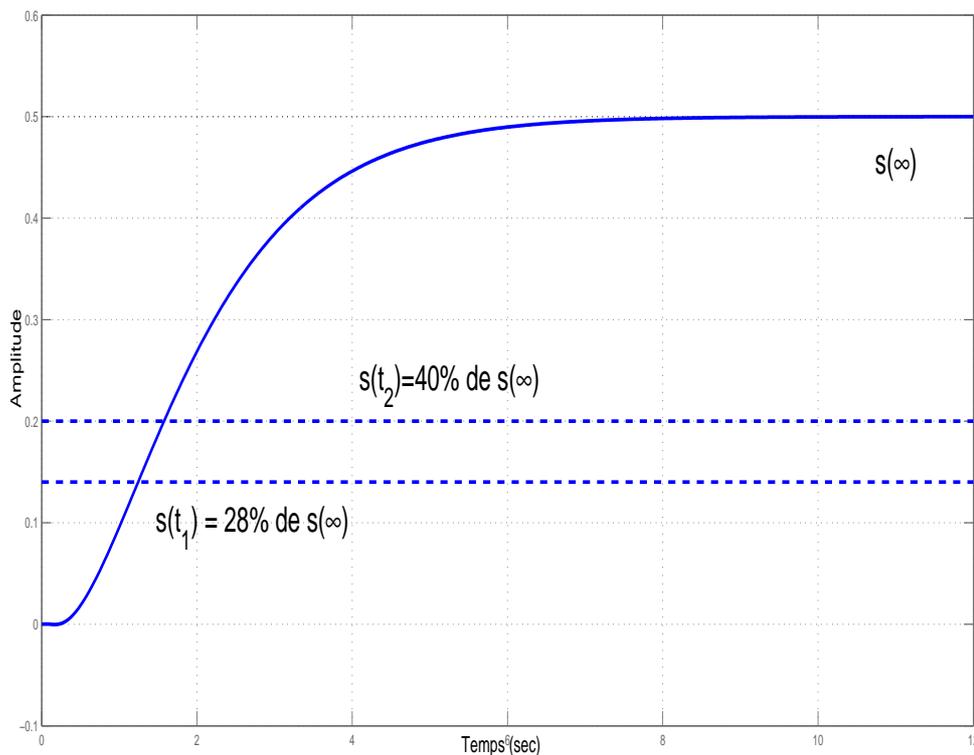


Figure 8.2 – Réponse d'un système à identifier avec la méthode de Broïda

8.4. Méthode de Broïda

où

- le gain statique $K = \frac{s(\infty)}{e_0}$,
- la constante de temps $\tau = 5.5(t_2 - t_1)$,
- le retard $R = 2.8t_1 - 1.8t_2$.

Tenue d'altitude d'un quadrirotor

Au cours de cette séance de TDAO, vous mettrez en œuvre une stratégie de commande visant à contrôler l'altitude du quadrirotor représenté sur la figure 9.1.



Figure 9.1 – A gauche, vue schématique d'un quadrirotor. A droite, le U130 de Novadem

La structure de ce quadrirotor est supposée rigide, de masse m constante et le centre de gravité est fixe. Soit $R_E = (O, \vec{x}_E, \vec{y}_E, \vec{z}_E)$, un repère inertiel orthonormé dont l'origine est le point de décollage, où \vec{x}_E pointe vers le nord, \vec{y}_E vers l'est et \vec{z}_E pointe en direction de la terre. Le vecteur $\vec{\xi}^{R_E} = (x, y, z)^T$ repère la position du centre de gravité du drone dans R_E . Soit $R_b = (c.g., \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$ un repère orthonormé direct lié au véhicule et partiellement représenté sur la figure 9.1. Les angles de gîte ϕ , d'assiette θ et le cap ψ décrivent l'orientation de R_b/R_e .

Ce quadrirotor possède :

- une entrée de commande pour le contrôle de la poussée T . Celle-ci est obtenue en commandant simultanément les vitesses de rotation Ω_i des hélices avec $i \in \{1..4\}$

$$T = -k_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

où k_1 désigne le coefficient de poussée des hélices.

- une centrale d'attitude pour les mesures de ϕ et θ , un capteur barométrique pour la mesure de l'altitude $h = -z$.

Les équations du mouvement pour l'étude de la tenue d'altitude s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_z &= g - \frac{k_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)}{m} \cos\phi \cos\theta\end{aligned}$$

La seconde équation est non linéaire et les formalismes présentés en cours ne permettent pas *a priori* d'étudier une commande pour ce système. Pour aller un peu plus loin, on propose d'étudier une méthode de commande non linéaire dite d'*inversion dynamique*.

9.1 Inversion dynamique

La méthode d'inversion dynamique consiste à appliquer au système une commande qui linéarise le système en lui conférant la fonction de transfert d'un intégrateur pur. Soit le système décrit par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{9.1}$$

Si on lui applique la commande :

$$u^* = g(x)^{-1}(\dot{x} - f(x)) \tag{9.2}$$

et qu'on impose à \dot{x} dans u^* de suivre un profil désiré \dot{x}_{des} , alors en remplaçant (9.2) dans (9.1), il vient :

$$\dot{x} = \dot{x}_{des} \tag{9.3}$$

et le système ainsi commandé se comporte comme un intégrateur pur¹.

Question 1 : *Pour cette question, on suppose que les quatre hélices développent la même poussée i.e. $\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \Omega_3^2 = \Omega_4^2$. Appliquez la méthode d'inversion dynamique à l'équation de \dot{v}_z et donnez l'expression de la vitesse de rotation des hélices.*

Question 2 : *Avec cette commande, à quelles équations simples se ramène le système ?*

Question 3 : *Etablissez dans ces conditions la fonction de transfert qui lie la nouvelle entrée $\dot{v}_{z_{des}}$ à z . Ce système est-il stable ?*

Dans l'espace de votre promotion sur le site EEE, copiez le répertoire Fichiers Matlab, décompressez-le dans le répertoire $D : \backslash mon_nom$. Positionnez le chemin de Matlab sous le répertoire **tdao9** puis ouvrez et exécutez le fichier **quadri.mdl** qui ouvre la fenêtre **SIMULINK** contenant le schéma du système.

Question 4 : *Sur le schéma **SIMULINK**, implémentez la loi de commande non linéaire trouvée à la question 1. Vous trouverez toutes les fonctions utiles dans les bibliothèque **Math Operations** et **Sources**. La masse $m = 1.5\text{kg}$ et le coefficient de poussée d'une hélice $k_1 = 1,416.10^{-5}$.*

1. Cette méthode suppose le modèle du système parfaitement identifié, elle est donc peu robuste du fait des incertitudes pouvant affecter les paramètres du modèle.

9.2. Boucle d'asservissement pour la tenue d'altitude

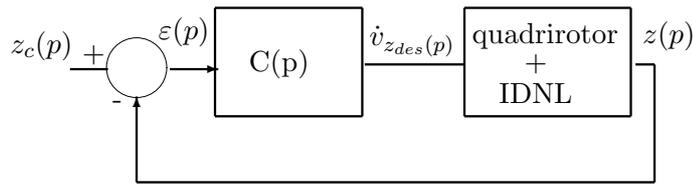


Figure 9.2 – La boucle d'asservissement d'altitude

9.2 Boucle d'asservissement pour la tenue d'altitude

Le quadrirotor, muni de la commande calculée précédemment se comporte désormais comme un système linéaire mais il nécessite une correction. Dans ce qui suit, les stratégies de commande étudiées en cours peuvent être mises en œuvre. On étudiera une stratégie de commande basée sur la poursuite d'un modèle de référence et une stratégie de commande basée sur un réglage de performances dans le domaine fréquentiel. Le système décrit par la fonction de transfert trouvée à la question 3 est inséré dans une boucle d'asservissement décrite sur la figure 9.2. La nouvelle entrée de commande du système est $\dot{v}_{z_{des}}$ et il convient de déterminer le correcteur $C(p)$ tel que $\dot{V}_{z_{des}}(p) = C(p)\varepsilon(p)$ où $\varepsilon(p) = z(p) - z_c(p)$.

Poursuite d'un modèle de référence

Question 5 : Calculez les paramètres du correcteur proportionnel-dérivé qui confère à la boucle fermée le comportement d'un système de fonction de transfert ayant le même dénominateur que :

$$FTBF(p) = \frac{z(p)}{z_c(p)} = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}$$

.

Question 6 : Ce correcteur n'étant pas réalisable (le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur), vous en implémenterez une version modifiée. Soit $C(p) = \frac{K(Tp + 1)}{0.05Tp + 1}$ (ce qui revient à implémenter un correcteur à avance de phase). Implémentez ce correcteur sur le schéma SIMULINK préalablement muni de sa commande nonlinéaire. Simulez-le en réponse au un signal défini par :

- $z_c(t) = 0.5t\mathcal{U}(t)$ pour $t < 5s$,
- $z_c(t) = 2.5\mathcal{U}(t)$ pour $t \geq 5s$

Les erreurs de trainage et de position observées sont-elles conformes à la théorie ?

Synthèse d'une commande dans le domaine fréquentiel

Le correcteur est cette fois synthétisé dans le domaine fréquentiel en exploitant le lieu de Black-Nichols de la FTBO. Il s'agit de déterminer un correcteur qui confère à ce lieu le profil désiré.

TDAO 9. Tenue d'altitude d'un quadrirotor

Question 7 : Saisissez sous *MATLAB* la fonction de transfert trouvée à la question 3. Exécutez *sisotool* et visualisez l'abaque de Nichols de cette fonction de transfert.

Montrez qu'un correcteur à avance de phase peut permettre de stabiliser la boucle d'asservissement d'altitude. Synthétisez ce correcteur de sorte que le lieu de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée tangente, au voisinage du point critique, l'isogain 1dB. Toujours sous *sisotool* observez la réponse indicielle corrigée (menu Analysis Plot).

Question 8 : Implémentez ce correcteur proportionnel-dérivé sur le schéma *SIMULINK* préalablement muni de sa commande nonlinéaire et simulez-le. Vous le soumettez aux mêmes signaux de consigne que ceux de la question 6.

Commande par retour d'état de la dynamique latérale d'un airliner

Dans ce bureau d'études, on cherche à contrôler un *airliner* autour de ses axes de roulis et de lacet. Le modèle de l'appareil est celui étudié au chapitre 5 du cours. Dans une première partie, vous mettrez en évidence les modes propres de l'aéronef et les effets de chacune des commandes sur ces modes. Dans un second temps, vous dimensionnerez une commande par retour d'état avec stratégie de placement de pôles et de vecteurs propres. Cette loi de commande sera dimensionnée en vue de découpler les axes de roulis et de lacet par le contrôle de la gouverne de direction et les ailerons. Enfin, dans le cas où, seule une partie du vecteur d'état est mesurée, vous mettrez en œuvre une commande par retour de sortie dont vous évaluerez les limites.

Sous MATLAB, vous écrirez un *script* pour chacune des parties. En aucun cas vous ne devez coder dans la fenêtre d'édition des commandes.

10.1 Modélisation et Linéarisation

Les équations latérales de la mécanique du vol d'un avion évoluant à vitesse et altitude constantes, à pente nulle et à très faible incidence α_e sont données dans (10.1). Les vecteurs d'état $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \beta & r & p & \phi \end{pmatrix}^T$ et de commande $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \delta_n & \delta_\ell \end{pmatrix}$ où β est l'angle de dérapage, p la vitesse de roulis, r la vitesse de lacet, ϕ l'angle de gîte, δ_n l'angle de braquage de la gouverne de direction et δ_ℓ l'angle de braquage des ailerons.

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta} &= \gamma_{11}\beta + \gamma_{12}r + \gamma_{13}p + \gamma_{14}\sin\phi + \gamma_{15}\delta_n + \gamma_{16}\delta_\ell \\
 \dot{r} &= \gamma_{21}\beta + \gamma_{22}r + \gamma_{23}p + \gamma_{24}\sin\phi + \gamma_{25}\delta_n + \gamma_{26}\delta_\ell \\
 \dot{p} &= \gamma_{31}\beta + \gamma_{32}r + \gamma_{33}p + \gamma_{34}\sin\phi + \gamma_{35}\delta_n + \gamma_{36}\delta_\ell \\
 \dot{\phi} &= p + \tan\theta_e(r\cos\phi + q_e\sin\phi)
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Question 1 : Dans le cas où l'on suppose de petites variations \mathbf{x}, \mathbf{u} , de ces variables autour de l'équilibre défini par $\mathbf{X}_e = \mathbf{0}$ et $\mathbf{U}_e = 0$, linéarisez les équations (10.1) et établissez les

expressions des matrices d'état et de commande.

10.2 Analyse Modale

Les résultats mis en évidence dans cette partie sont ceux qui ont été entrevus aux chapitre 5 du cours. Le système est décrit par l'équation d'état (10.2) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (10.2)$$

avec, dans le cas d'un Boeing 747 évoluant à Mach 0.8 et 40000 pieds :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -.0558 & -.9968 & .0802 & .0415 \\ .598 & -.115 & -.0318 & 0 \\ -3.05 & .388 & -.4650 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} .00729 & 0 \\ -0.475 & 0.00775 \\ 0.153 & 0.143 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

Tout le vecteur d'état est mesuré $\mathbf{y} = (\beta_m \ r_m \ p_m \ \phi_m)^T$. Ces mesures sont parfaites, ce qui signifie que la mesure est à tout instant égale à la grandeur physique afférente. Pratiquement ces mesures sont obtenues au moyen d'une sonde de dérapage, de gyromètres et d'un gyroscope de verticale.

Question 2 : Saisir sous MATLAB cette représentation d'état \rightsquigarrow fonction ss.

Question 3 : Calculer les valeurs propres et la matrice des vecteurs propres de la matrice d'état \rightsquigarrow fonction eig.

Question 4 : Identifier les modes et caractérisez-les. Soit par leur constante de temps, soit par leur pulsation propre non amortie et leur facteur d'amortissement réduit. Quelle critique porteriez-vous sur le comportement de cet avion ?

Question 5 : Les coefficients de la matrice des vecteurs propres prennent leurs valeurs dans \mathbb{C} . Calculer le module de ces coefficients avec la fonction \rightsquigarrow abs et justifier le fait que les axes de roulis et de lacet sont couplés.

Question 6 : Au moyen de la fonction \rightsquigarrow initial ou avec Itiview, tracer la réponse du vecteur d'état aux condition initiales $\mathbf{x}(0) = \left(0 \ 0 \ 0 \ \frac{20\pi}{180}\right)^T$. Sur les chronogrammes, mettez en évidence le mode du premier ordre lent et le mode du second ordre.

Question 7 : Calculer la matrice de commande dans la base modale, soit $\tilde{\mathbf{B}}$ cette matrice. Les coefficients de cette dernière prennent leur valeur dans \mathbb{C} . Calculez les modules de ces coefficients et dites :

- Si l'avion est commandable.
- Pour chacun des modes, quelle est la commande qui le contrôle le plus efficacement ?

10.3. Commande par retour d'état avec placement des vecteurs propres

Question 8 : *Les conditions requises pour la mise en œuvre d'une commande par retour d'état sont-elles établies ?*

10.3 Commande par retour d'état avec placement des vecteurs propres

L'appareil étudié présente une dynamique du second ordre mal amortie et l'une de ses dynamiques du premier ordre est trop lente. Pour contrôler ces dynamiques, on met en œuvre une commande par retour d'état de la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{e} - \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (10.4)$$

Dans cette partie, on envisage une commande par placement de pôles et de vecteurs propres. L'intérêt de cette approche réside dans la possibilité de découpler les dynamiques des axes de roulis de celles de lacet. Reportez-vous au §3.3.3 du chapitre 6 du livre de cours pour les développements théoriques.

Les modes désirés pour l'avion corrigé :

- On souhaite que le mode d'ordre deux soit plus rapide et mieux amorti.
- le pôle du mode d'ordre un le plus lent reste inchangé,
- le pôle du mode d'ordre un le plus rapide doit être à l'origine d'un régime transitoire inférieur ou égal à une trois secondes.
- le mode d'ordre deux doit être découplé du roulis p ,
- le mode d'ordre un le plus rapide doit être découplé du dérapage β
- le mode d'ordre un le plus lent doit être découplé du lacet r

Question 9 : *Au moyen des équations (10.2) et (10.4), établissez l'expression littérale de la représentation d'état du système corrigé.*

Calcul de la matrice de contre-réaction \mathbf{K}

Question 10 : *Saisissez-les pôles de l'avion corrigé sous MATLAB dans un vecteur appelé poles.*

TRUCS & ASTUCES MATLAB

On accède au i^e pôle v_i en éditant la commande `poles(i)`.

Question 11 : *Les vecteurs de contraintes règlent les découplages des variables d'état et de commande vis-à-vis des modes. Comme il y a $m = 2$ commandes, on ne peut définir qu'un vecteur de contrainte par pôle. Au vu des informations qui précèdent, définissez et saisissez sous MATLAB les quatre vecteurs de contraintes \mathbf{c}_i avec $i \in [1..4]$ de dimension 6.*

Question 12 : *Pour chaque pôles (valeur propre v_i), calculez le noyau de l'application linéaire*

TDAO 10. Commande par retour d'état de la dynamique latérale d'un airliner

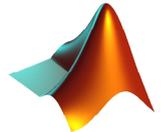
↪ fonction null :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \nu_i \mathbb{I}_n & -\mathbf{B} \\ & \mathbf{c}_i \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

Vous stockerez le résultat de ce calcul dans un vecteur $\mathbf{v}\mathbf{w}_i$ et vous vérifierez que ce vecteur à la structure désirée.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

- La matrice identité ↪ fonction `eye`
- La matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$ s'écrit sous MATLAB `[\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}; \mathbf{A}_2]`
- Pour accéder au n premières composantes du vecteur $\mathbf{v}\mathbf{w}_i$ ↪ $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}\mathbf{w}_i(1:n)$
- Pour accéder au m dernières composantes du vecteur $\mathbf{v}\mathbf{w}_i$ ↪ $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}\mathbf{w}_i(n+1:n+m)$



Question 13 : Vous construirez les matrices de passage \mathbf{P} et de sensibilité des commandes aux modes \mathbf{W} en concaténant les vecteurs \mathbf{v}_i et les vecteurs \mathbf{w}_i avec $i \in [1..4]$.

Calculez la matrice de contre-réaction \mathbf{K} et vérifiez que l'ensemble des valeurs propres $\text{spe}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ est celui attendu.

Calcul de la matrice H

Comme on dispose de deux commandes, on peut contrôler deux variables. Soit $\zeta^T = \begin{pmatrix} \beta & \phi \end{pmatrix}$ le vecteur des variables contrôlées.

Question 14 : Écrire l'équation des variables contrôlées sous la forme $\zeta = \mathbf{M}\mathbf{x}$.

Question 15 : Quelle doit être la dimension de la matrice de pré-gain \mathbf{H} ? Calculer numériquement le(s) coefficient(s) de cette matrice, de sorte qu'en régime permanent les sorties contrôlées ζ soient égales aux consignes \mathbf{e} .

Simulation

Ouvrez et exécutez le fichier `ModelBoeing747.m`. Lancez la simulation pour vérifier son bon fonctionnement.

Question 16 : Sur ce modèle, implémentez et testez la commande par retour d'état (10.4) avec les valeurs de \mathbf{K} et \mathbf{H} calculées précédemment. Observez toutes les sorties et vérifiez que les découplages sont effectifs. Vous trouverez les blocs utiles dans les bibliothèques suivantes :

- `gain` (Paramétrez les matrices avec l'option `Multiplication Matrix(K*u)`), `add` ↪ `Maths`
- `mux` ↪ `Signal Routing`
- `step` ↪ `Sources`
- `scope` ↪ `Scope`

10.4 Commande par retour de sortie

Dans cette dernière partie, on suppose que le dérapage β n'est pas mesuré. On cherche cependant à mettre en œuvre une loi de commande dite par retour de sortie. Cependant, comme trois variables d'état sont mesurées, on ne pourra contrôler que trois des quatre pôles caractéristiques de la dynamique latérale. Il est conseillé de s'appuyer sur le cours pour synthétiser cette commande.

Question 17 : Dans le cas où seules les variables d'état r , p et ϕ sont mesurées, donnez l'expression numérique de la matrice de sortie \mathbf{X} telle que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10.6}$$

Question 18 : À partir de l'équation d'état (10.2), de l'équation de sortie (10.6) et de celle de la commande (10.7), établissez l'équation de la commande par retour de sortie et l'expression de la matrice d'état corrigée.

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{e} - \mathbf{K}\mathbf{y} \tag{10.7}$$

Les objectifs de la commande restent les mêmes que ceux définis dans la section précédente. Toutefois, comme on ne dispose que de trois mesures, on ne peut placer que trois pôles.

Les pôles désirés pour l'avion corrigé¹ :

- On souhaite que les pôles complexes conjugués valent $-1 \pm i$,
- le pôle du mode d'ordre un le plus lent reste inchangé,
- on ne place pas le pôle d'ordre un le plus rapide.
- le mode d'ordre deux doit être découplé de la commande des ailerons δ_ℓ ,
- le mode d'ordre un le plus lent doit être découplé de la commande des ailerons δ_n

Question 19 : Pour chaque pôles (valeur propre ν_i avec $i \in [1..3]$),

- Calculez le noyau de l'application linéaire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \nu_i \mathbb{I}_n & -\mathbf{B} \\ \mathbf{c}_i \end{pmatrix} \tag{10.8}$$

en vue d'obtenir les \mathbf{v}_i et les $\mathbf{w}_i = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}_i$.

- Construisez ensuite les matrices de passage $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ et $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$,
- calculez la matrice de contre-réaction \mathbf{K} ,
- calculez les pôles de la matrice d'état corrigée. Que constatez-vous ?
- dans le calcul, choisissez les pôles d'ordre deux égaux à $\{-0.5 \pm 0.5i\}$.

Ces simulations montrent qu'un retour de sortie est possible à la seule condition de dégrader les dynamiques, ici le temps de réponse du mode d'ordre deux. Dans les cours qui suivent, nous

1. Ces réglages diffèrent des précédents, il n'a en effet pas été possible de trouver un réglage du système stable par retour de sortie avec le cahier des charges proposé à la section précédente

TDAO 10. Commande par retour d'état de la dynamique latérale d'un airliner

mettrons en œuvre des observateurs. Ces systèmes dynamiques estiment les variables d'état que l'on ne mesure pas. Il est alors possible de réaliser une commande, non à partir des variables d'état mesurées mais à partir du vecteur d'état estimé.

 Observateur déterministe : application à l'estimation de cap

Dans ce problème, on met en œuvre un observateur pour réaliser l'estimation de la mesure du cap magnétique ψ d'un robot mobile. Les angles et les vecteurs utilisés sont représentés sur la figure 11.1. Pratiquement, on cherche à définir l'orientation du trièdre mobile ($o, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b$) autour de son origine par rapport à un repère fixe ($o, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$). Le vecteur \mathbf{x} est dirigé vers le Nord magnétique. Pour cela, on utilise les capteurs suivants :

- un gyromètre porté par l'axe de lacet \mathbf{z}_b qui mesure la vitesse de lacet r , soit r_m cette mesure.
- un magnétomètre porté par l'axe de roulis \mathbf{x}_b qui mesure le champ magnétique terrestre selon \mathbf{x}_b , soit mag_x cette mesure,
- un magnétomètre porté par l'axe de tangage \mathbf{y}_b qui mesure le champ magnétique terrestre selon \mathbf{x}_b , soit mag_y cette mesure,

Pour cette étude, on ne considère que les mouvements de rotation autour de $\mathbf{z} = \mathbf{z}_b$. La centrale d'attitude *MTI* de la marque *XSENS* <http://www.xsens.com/> réalise la fonction d'estimation d'attitude et en particulier celle du cap magnétique ψ .

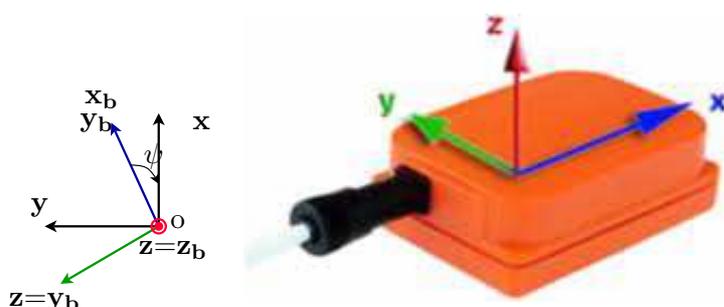


Figure 11.1 – Les repères et la centrale MTI de XSENS

11.1 MODÈLES

L'équation d'état

La cinématique de rotation est décrite par :

$$\dot{\psi} = r \quad (11.1)$$

Cependant, la mesure de la vitesse de lacet comporte une erreur systématique b constante, de sorte que :

$$r_m = r + b \quad (11.2)$$

Pratiquement, on calcule une estimation du cap au moyen de la vitesse mesurée r_m . Dans ces conditions, r_m jou le rôle d'entrée du système alors que b et ψ sont des variables d'état.

Question 1 : *Écrivez les l'équation d'état de b et de ψ . Vous ferez explicitement apparaître les matrices d'état \mathbf{A} et de commande \mathbf{B} .*

Question 2 : *Proposez une représentation d'état à temps discret approchée pour ce modèle. On adoptera pour période d'échantillonnage $T = 10\text{ms}$.*

Question 3 : *Ouvrez le modèle SIMULINK `estimeur_cap.mdl` et réalisez l'équation d'état à temps discret. Attention à renseigner pour chaque bloc le champ *Sample Time* avec la valeur T . Les blocs utiles dans les bibliothèques suivantes :*

- *gain* (Paramétrez les matrices avec l'option *Multiplication Matrix(K*u)*), *add* \rightsquigarrow *Maths*
- *delay* \rightsquigarrow *Discrete*
- *mux* \rightsquigarrow *Signal Routing*
- *step* \rightsquigarrow *Sources*
- *scope* \rightsquigarrow *Sinks*

L'équation d'observation

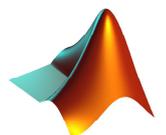
Question 4 : *Établissez les équations qui permettent d'obtenir une mesure ψ_m du cap ψ à partir des mesures mag_x et mag_y délivrées par les magnétomètres. Le champ magnétique terrestre est dirigé selon \mathbf{x} et a une intensité de $B_0 = 47\mu\text{T}$.*

Question 5 : *On suppose désormais que ψ_m est la mesure du cap. Établissez l'expression de l'équation d'observation, en particulier l'expression de la matrice de sortie \mathbf{C} .*

Question 6 : *Réalisez cette mesure du cap ψ_m sous SIMULINK sur `estimeur_cap.mdl`.*

TRUCS & ASTUCES MATLAB

Pour obtenir une valeur du cap ψ_m à partir des mesures issues des magnétomètres dans les quatre cadrans du cercle trigonométrique, utiliser la fonction \rightsquigarrow `atan2`.



11.2 OBSERVATEUR

Question 7 : *Établissez l'observabilité du système décrit par les équations d'état et d'observation établies dans la section précédente.*

Question 8 : *À partir des équations d'état et d'observation établies précédemment, donnez l'équation d'état de l'observateur à temps discret qui estime ψ et b , soit $\hat{\psi}$ et \hat{b} ces estimations. Proposez une structure pour la matrice des gains \mathbf{L} .*

Question 9 : *Établissez l'équation d'état des erreurs d'estimation, soit $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_\psi \quad \varepsilon_b)^T$. Il est conseillé de traiter dans un premier temps cette question dans le cas général avec les matrices \mathbf{F} , \mathbf{G} et \mathbf{L} puis de substituer à ces matrices leurs valeurs particulières.*

Les erreurs d'estimation $\boldsymbol{\varepsilon}$ doivent converger s'annuler en régime permanent. Pratiquement, le robot mobile qui embarque la centrale a une vitesse de rotation maximale autour de son axe de lacet de $\pi \text{rad.s}^{-1}$, avec une période d'échantillonnage de 10ms , cela revient à estimer le cap entre deux déplacements de 1.8° . On souhaite que les erreurs d'estimation convergent en 50ms et oscillent peu. Comme le système est un second ordre, on choisit $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Question 10 : *Calculez la pulsation propre non amortie correspondant à ce réglage de la dynamique des erreurs. Calculez les pôles du systèmes continu correspondant puis ceux du système à temps discret équivalent.*

Question 11 : *À partir des pôles, calculer le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{F} - \mathbf{LC}$ et l'identifier à $|\mu\mathbb{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{LC})|$ où $|\mathbf{A}|$ désigne le déterminant de la matrice \mathbf{A} . En déduire la matrice des gains \mathbf{L} de l'observateur. Vérifiez votre calcul avec la fonction \rightsquigarrow place. Attention à la syntaxe.*

Question 12 : *Implémentez l'observateur sous SIMULINK en utilisant le bloc mesures simulées et testez-le. Que vaut l'estimation de l'erreur systématique b ?*

11.3 BIAIS SUR L'ESTIMATION

Question 13 : *Dans le cas où la mesure est entachée d'une erreur systématique d constante de sorte que $\psi_m = \psi + d$, reformulez l'équation des états estimés et déduisez-en les équations d'état des erreurs d'estimation $\varepsilon_\psi, \varepsilon_b$.*

Question 14 : *Exprimez le terme général de la suite $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$ et donnez sa valeur en régime permanent (lorsque $k \rightarrow +\infty$). Vous montrerez que l'estimation est biaisée c.-à-d. que le vecteur d'état estimé diffère systématiquement du vecteur d'état. Pour mener ce calcul, vous exprimerez $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{LC}$ à partir de sa forme diagonale $\mathbf{H} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{P}$ où \mathbf{P} désigne la matrice de passage $\mathbf{F} - \mathbf{LC}$ dans la base modale.*

Question 15 : *Pour une erreur systématique $d = \frac{5\pi}{180}$ et avec les valeurs de ℓ_1, ℓ_2 trouvées*

précédemment, calculez numériquement les erreurs systématiques commises sur les estimations $\hat{\psi}$ de ψ et \hat{b} de b en régime permanent.

Question 16 : Sur le schéma SIMULINK de l'observateur, double-cliquez sur le bloc mesures simulées et renseignez le champ erreur sur le cap. Évaluez par la simulation les erreurs systématiques commises par l'observateur et comparez-les à celles obtenues par le calcul.

11.4 SIGNAUX RÉELS

Question 17 : Sur le schéma SIMULINK de l'observateur, appliquez à l'observateur les signaux issus du bloc capteur réel. Qu'observez-vous ? Interprétez le comportement de l'observateur.

Dans cette dernière partie, on va mettre en évidence le fait que l'observateur est un filtre dont la bande passante dépend des gains ℓ_i de l'observateur. Pour cela on reformule l'équation d'état de l'observateur comme suit :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}_k + \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k \quad (11.4)$$

Question 18 : Saisissez cette représentation d'état¹ puis établissez sa matrice de fonctions de transfert sous MATLAB \rightsquigarrow tf. Tracez le diagramme de Bode du gain de l'observateur avec Itview ou la fonction bodemag et identifiez les structures des différents filtres.

Question 19 : Même question pour une dynamique de l'erreur caractérisée par les pôles $\{-0.5 \pm 0.5i\}$.

Question 20 : La bande passante dépend logiquement du choix opéré pour les pôles, elle diminue tandis que le module des pôles diminue. Il en va de même pour les gains. Le tracé des diagrammes de Bode montre deux filtres, un passe-haut (comportement d'un intégrateur) pour le traitement de la mesure gyrométrique, ce qui est intéressant pour supprimer la composante continue que constitue l'erreur systématique constante ou lentement variable qui entache la mesure délivrée par ce capteur. Un filtre passe-bas pour le traitement de la mesure issue de ψ , ce qui serait plus particulièrement indiqué pour traiter le bruit qui entacherait la mesure du cap. Plus le module des pôles est grand, plus le crédit apporté à la mesure est grand, moins celui apporté à la prédiction l'est. Ce que confirme les diagrammes des gains.

	ℓ_1	ℓ_2
$-42.4264 \pm 42.4264i$	0.8	-23.55
$0.5 \pm 0.5i$	0.01	-0.005

1. Attention au fait qu'il s'agit d'un système à temps discret

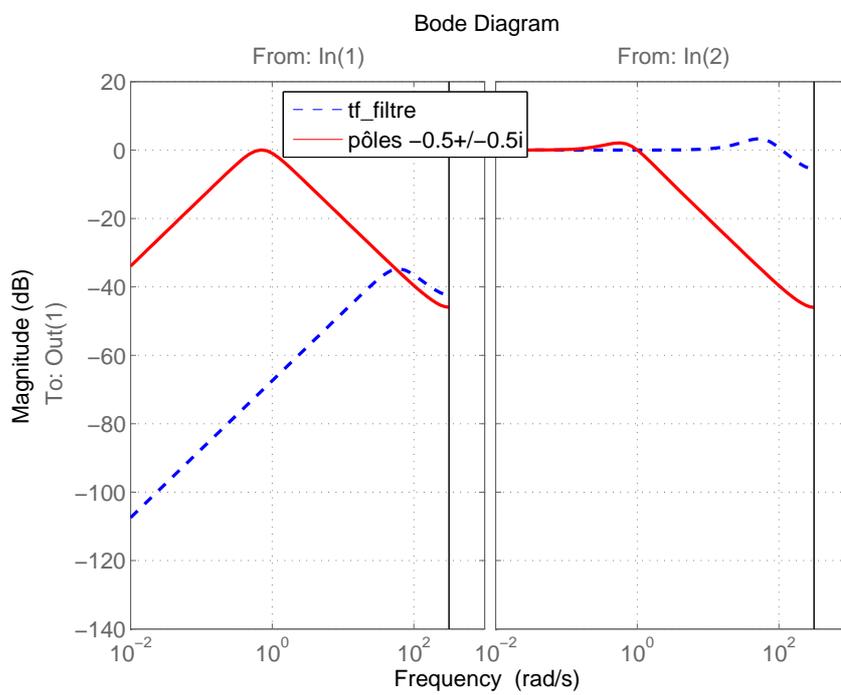


Figure 11.2 – Estimation de la vitesse par intégration de l'accélération et dérivation de la position

Filtre de Kalman : Application à l'estimation de trajectoires

12.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Le radar de poursuite d'un Awacs tente de localiser une cible qui cherche à s'échapper. Outre le fait qu'elle soit très manœuvrante, cette cible brouille sa position en générant des contre-mesures. Le problème est représenté sur la figure 12.1 et les deux avions évoluent à la même altitude. L'AWACS vole à vitesse constante.

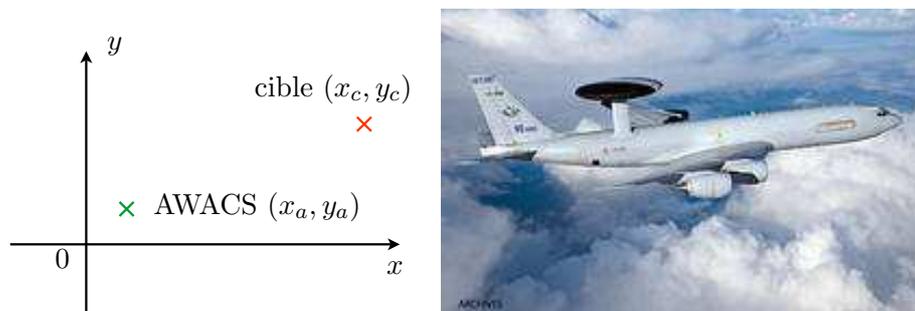


Figure 12.1 – Vue schématique du problème et photographie d'un AWACS du 36° EDCA

12.2 MODÈLES DE TRAJECTOIRES

Représentation d'état

Vous adopterez pour la représentation d'état de ce système les variables suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_c - x_a \\
 x_2 &= y_c - y_a \\
 x_3 &= \dot{x}_c - \dot{x}_a \\
 x_4 &= \dot{y}_c - \dot{y}_a
 \end{aligned}
 \tag{12.1}$$

Pour rendre compte du caractère aléatoire de la trajectoire, on ajoute un bruit d'état, pratiquement il s'agit d'une accélération de sorte que :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3 &= \ddot{x}_c - \ddot{x} + w_1 \\
 \dot{x}_4 &= \ddot{y}_c - \ddot{y} + w_2
 \end{aligned}$$

Question 1 : *Écrire l'équation d'état de ce système et précisez les expressions des matrices d'état et d'entrée. Par ailleurs, on mesure la position relative de la cible au chasseur selon les directions x et y . Saisissez les expressions de ces matrices dans un script sous MATLAB que vous prendrez soin de commenter.*

Question 2 : *Écrire l'équation d'état approchée du système à temps discret équivalent pour une période d'échantillonnage $T = 200\text{ms}$. Saisissez les expressions de ce modèle sous MATLAB \rightsquigarrow ss. Attention à bien respecter la syntaxe pour un système échantillonné.*

Modèle des bruits d'état et de mesure

Le bruit d'état est dans un premier temps supposé blanc, centré. Les variances q_1^2 de w_1 et q_2^2 de w_2 sont respectivement égales à 1 et 9 (exprimées en $m^2.s^{-4}$). Elles rendent compte des accélérations auxquelles est soumise la cible tandis qu'elle manœuvre pour éviter d'être accrochée par le radar.

Question 3 : *Écrire l'expression de la matrice de variance du bruit d'état \mathbf{Q} , la saisir dans le script sous MATLAB.*

Le bruit de mesure est supposé blanc, centré de variance $r_1^2 = r_2^2 = 400m^2$. Ces variances rendent compte des contre-mesures qui brouillent le radar. Que représentent-les écarts-types r_1 et r_2 ?

Question 4 : *Écrire l'expression de la matrice de variance du bruit de mesure \mathbf{R} et la saisir dans le script sous MATLAB.*

12.2. MODÈLES DE TRAJECTOIRES

Génération des trajectoires

La durée de la simulation est fixée à 60 s. Vous devez, préalablement à la génération des trajectoires, définir un vecteur temps qui contient les instants auxquels on simule le système. Pratiquement on procède de la façon suivante :

```
1 T=0.2 s
2 Tsim=60;
3 temps = 0:T:Tsim; %génération d'un vecteur ligne de longueur 301
4 temps=temps'      %transposition en vecteur colonne
```

Question 5 : Générez les vecteurs colonnes aléatoires bruit d'état w_1 et w_2 ayant respectivement pour écart-type q_1 et q_2 en utilisant la fonction \rightsquigarrow `randn`. La longueur de ces vecteurs est fonction de la période d'échantillonnage T et de la durée de la simulation. Il est possible de générer directement une matrice 301 lignes \times 2 colonnes, soit \mathbf{w} cette matrice. Générez également les vecteurs colonnes aléatoires bruit de mesure v_1 et v_2 ayant respectivement pour écart-type r_1 et r_2 . Il est possible de générer directement une matrice 301 lignes \times 2 colonnes, soit \mathbf{v} cette matrice.

Question 6 : Générez la trajectoire d'état en utilisant la fonction \rightsquigarrow `lsim`. Vous stockerez dans des variables \mathbf{x} et \mathbf{y} les vecteur d'état et de sortie calculés puis afficherez \rightsquigarrow `plot` la trajectoire relative de la cible et de l'AWACS chasseur.

Ajoutez au vecteur de sortie \mathbf{y} le bruit de mesure \mathbf{v} et affichez, en surimpression de la trajectoire réelle, la trajectoire mesurée.

TRUCS & ASTUCES MATLAB

La matrice \mathbf{y} étant de dimension $q \times n$, on accède au i^{e} vecteur colonne en appelant $\mathbf{y}(:, i)$.

Question 7 : En vous inspirant du programme ci-joint et des résultats établis en cours, calculez sur toute la durée de la simulation la matrice de covariance de l'état du système définie par :

$$\Sigma_{\mathbf{k}} = E[(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})(\mathbf{x}_{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}})^T] \quad (12.2)$$

où $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{k}} = E[(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})]$ est l'espérance ou moyenne du vecteur d'état.

```
1 % Boucle itérative
2 % Ce programme calcule x(k+1)=A*x(k)+B*u(k) et affiche la trajectoire d'état
3 clear all; clc
4
5 N=100;           % le nombre d'itérations
6 x=[1;0.5] ;     % les conditions initiales
7 u=ones(N,1);    % le signal d'entrée : un échelon unitaire de longueur N
8
9 A=[0.9 0;0 0.2]; % déclaration des matrices
10 B=[0;0.1];
11
12 for i=1:N-1,
13     x(:,i+1)=A*x(:,i)+B*u(i);
14 end
15 % x est un vecteur de dimension 2*N
16
17 plot(x(1,:),x(2,:), 'r', 'LineWidth',2)
```

Interprétez les valeurs des coefficients diagonaux σ_i^2 avec $i \in [1..4]$ de cette matrice qui sont les variances des variables d'état. Confrontez ce résultat à la trajectoire. Il peut être intéressant de tracer les σ_i en fonction du temps.

12.3 FILTRE DE KALMAN

Question 8 : Vérifiez en en rappelant la procédure, l'observabilité du système. Cette condition est requise pour mettre en œuvre le filtre de Kalman.

Question 9 : Rappeler les équations du filtre de Kalman. On notera \mathbf{P}_k la covariance de l'erreur d'estimation.

Question 10 : En vous inspirant du programme joint ci-dessus, implémenter les équations du filtre de Kalman. Les variables d'état estimées $\hat{\mathbf{x}}_k$ seront stockées dans `xest`. Dans un premier temps, l'état initial est supposé parfaitement connu. Réglez les conditions initiales $\hat{\mathbf{x}}_0$ et \mathbf{P}_0 en conséquence. Attention, dans les tableaux, MATLAB ne reconnaît pas, contrairement au C, l'indice 0 et $\hat{\mathbf{x}}_0$ est en fait `xest(1)`.

Afficher la trajectoire obtenue au moyen du filtre¹

Question 11 : Calculez la somme quadratique des erreurs de mesure et celles des erreurs d'estimation. Comparez-les et mettez en évidence l'intérêt du filtre par rapport à la mesure seule.

Question 12 : Testez le filtre de Kalman pour des conditions initiales mal connues. Réglez les conditions initiales $\hat{\mathbf{x}}_0$ et \mathbf{P}_0 en conséquence.

12.4 CAPACITÉ MULTICIBLES

On va, avec ce radar, essayer de suivre avec deux cibles simultanément. Le principe consiste à opérer à deux estimation a priori pour une mesure et une estimation a posteriori.

Question 13 : Générez les trajectoires de deux avions. Vous prendrez soin de distinguer pour chacun d'eux les variables d'état et de sortie qui les caractérisent. Soit par exemple \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{y}_1 , \mathbf{y}_2 .

Question 14 : Modifiez le programme du filtre de Kalman de sorte qu'à chaque itération, on puisse prédire la position et la vitesse relative de chacun des avions ($\mathbf{x}_{1i+1|i}$, $\mathbf{x}_{2i+1|i}$), les matrices de covariance des erreurs d'estimation a priori ($\mathbf{P}_{1i+1|i}$, $\mathbf{P}_{2i+1|i}$) et les gains de de Kalman (\mathbf{K}_{1i+1} , \mathbf{K}_{2i+1}). Mais que l'on procède à la mesure de position relative de chacune des cibles \mathbf{y}_{12i+1} , \mathbf{y}_{22i} ainsi qu'à celle des états estimés a posteriori $\mathbf{x}_{12i+1|2i+1}$, $\mathbf{x}_{22i|2i}$ et des covariances des erreurs d'estimation a posteriori $\mathbf{P}_{12i+1|2i+1}$, $\mathbf{P}_{22i|2i}$ une fois sur deux. La fonction \sim mod qui calcule le reste de la division euclidienne peut réaliser ce test de parité.

1. Vous pouvez également, avec la fonction `quiver`, matérialiser par des flèches le cap de l'appareil. À ne faire que si vous jugez en avoir le temps.

12.5. À PROPOS DU BRUIT D'ÉTAT

12.5 À PROPOS DU BRUIT D'ÉTAT

Cette partie est facultative. L'affichage du bruit d'état \mathbf{w} modélisé par un bruit blanc montre que les variations de ce dernier, censées représenter des accélérations sont peu réalistes. Pour lisser ces bruits, on peut les traiter par un système décrit par une représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_{1k} \\ \dot{\omega}_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{T}{\tau} + 1 & 0 \\ 0 & -\frac{T}{\tau} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1k} \\ \omega_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{T}{\tau} & 0 \\ 0 & \frac{T}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

Ce qui équivaut à filtrer les composantes du bruit blanc \mathbf{w} par un filtre passe-bas de pulsation de coupure égale à $\frac{1}{\tau}$.

$$\frac{\omega_i(z)}{w_i(z)} = \frac{\frac{T}{\tau}}{z + \frac{T}{\tau} - 1} \quad (12.4)$$

On obtient un vecteur de bruits dits colorés $\boldsymbol{\omega}$. Les hypothèses posées par Kalman ne sont cependant plus vérifiées et l'estimation de l'état n'est pas optimale.

Question 15 : Générer le vecteur des bruits colorés $\boldsymbol{\omega}$ en prenant $\tau = 1s$, pour cela, vous devez implémenter sous MATLAB la représentation d'état (12.3).

Question 16 : Simulez la trajectoire de la cible tandis que le bruit d'état qui décrit les accélérations auxquelles elle est soumise est désormais $\boldsymbol{\omega}$. Vous pouvez dans le même temps soumettre la cible aux accélérations modélisées par \mathbf{w} et comparer les trajectoires obtenues.

Quatrième partie

ARCHIVES

Asservissement d'un avion en roulis

Présentation

On s'intéresse à l'asservissement de l'angle de gîte ϕ sur un avion au moyen de la gouverne de gauchissement δ_l

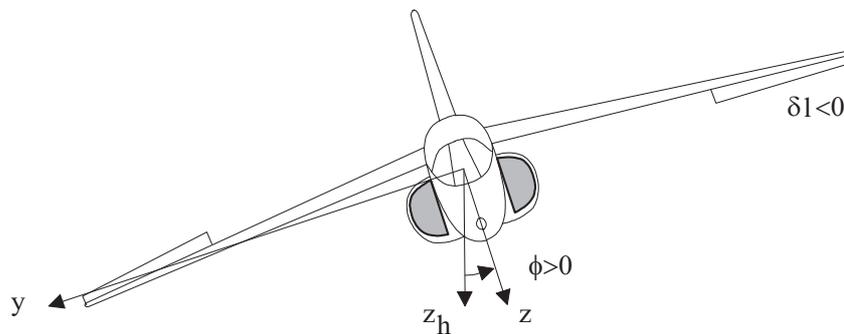


Figure 1.1 – Présentation des angles ϕ et δ_l

La figure 1.1 présente les notations conventionnelles de la mécanique du vol.

Sur le schéma fonctionnel, on distingue deux boucles pour la réalisation de l'asservissement :

- la boucle interne assurant l'asservissement de la position δ_l de la commande de gauchissement en fonction de la position δ_{lc} de consigne, c'est-à-dire la position souhaitée de la gouverne de gauchissement. La position de la gouverne est mesurée par un potentiomètre. Cette mesure sera supposée parfaite et assimilable à un gain unitaire.
- la boucle externe assurant l'asservissement de l'angle de gîte ϕ en fonction de la gîte souhaitée ϕ_c donnée par la position du manche en gauchissement ou d'une consigne donnée par le pilote automatique. La gîte est mesurée par un gyroscope.

En fonction de l'erreur sur la gîte, le correcteur de la boucle externe détermine l'angle de braquage δ_{lc} que devrait avoir la gouverne de gauchissement pour obtenir la gîte souhaitée.

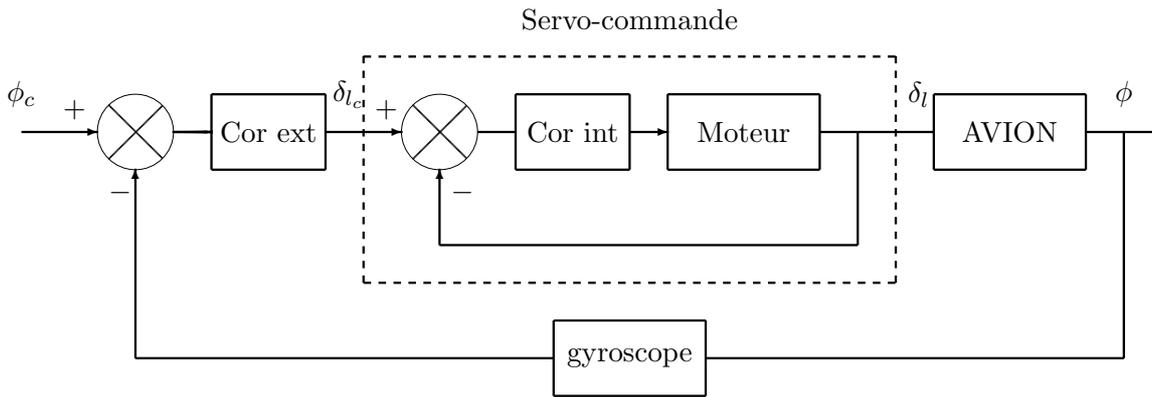


Figure 1.2 – Schéma fonctionnel de l'asservissement

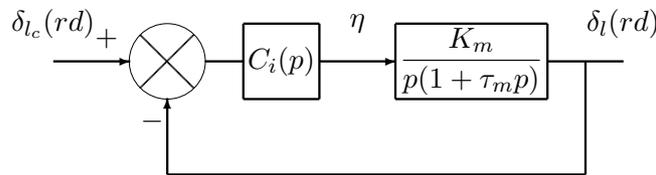


Figure 1.3 – La boucle d'asservissement de position des ailerons

La boucle interne a pour but d'agir sur la gouverne de gauchissement pour que son angle de braquage δ_l soit aussi conforme que possible à l'angle de consigne élaborée par la boucle externe.

Le problème comprend deux parties étudiant successivement les boucles internes et externes.

1.1 Asservissement en position de la gouverne

Le moteur de la servo-commande est commandé par un courant η . Sa fonction de transfert est de la forme $\frac{\delta_l(p)}{\eta(p)} = \frac{K_m}{p(1 + \tau_m p)}$

On souhaite que l'asservissement de la position de la gouverne de gauchissement de fonction de transfert $\frac{\delta_l(p)}{\delta_{lc}(p)}$ ait un comportement de type second ordre amorti tel que :

$$\begin{cases} \omega_n &= 400 \text{ (rad/s)} \\ \xi &= 0,52 \end{cases}$$

Correction proportionnelle unitaire

Question 1 : En supposant que la fonction de transfert du correcteur interne soit $C_i(p) = 1$, calculer l'expression littérale de $\frac{\delta_l}{\delta_{lc}}$. En déduire quelles devraient être les paramètres K_m et τ_m du moteur pour satisfaire les spécifications.

1.1. Asservissement en position de la gouverne

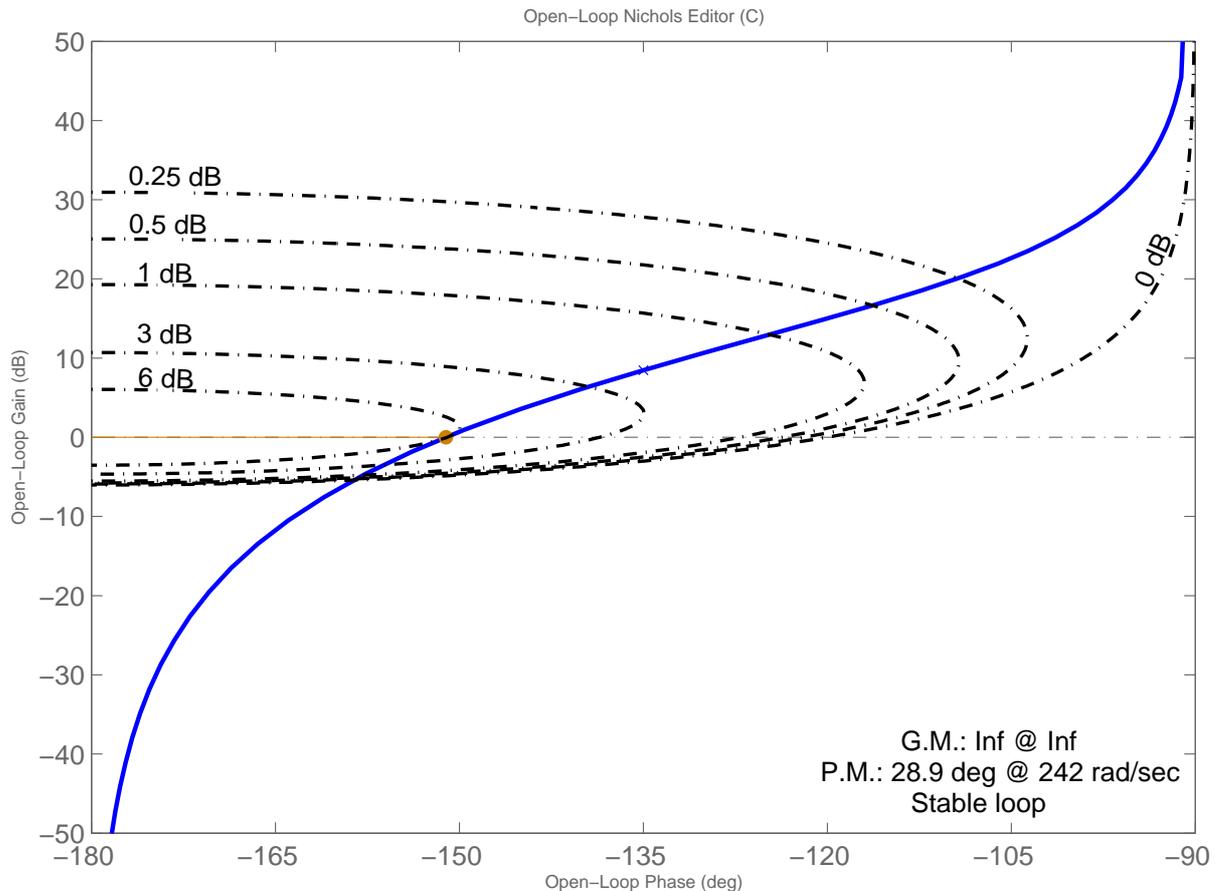


Figure 1.4 – Lieu de Black du moteur

Correction par avance de phase

Les caractéristiques du moteur sont en réalité $K_m = 500$ et $\tau_m = 7,5 \text{ ms}$ et ne permettent pas d'obtenir les performances souhaitées pour l'asservissement de position avec un correcteur aussi simple.

On va chercher à synthétiser un correcteur à avance de phase de la forme $C_i(p) = \frac{1 + \alpha\tau p}{1 + \tau p}$

La figure 1.4 donne le diagramme de Black de la fonction de transfert du moteur ainsi ses marges de stabilité et la pulsation ω_{0dB}

Question 2 : *Pour obtenir la valeur du facteur d'amortissement réduit voulu, on se fixe une marge de phase à atteindre après correction d'environ $M_\varphi = 60^\circ$. Justifiez ce choix (Indication : calculez le facteur de surtension correspondant au facteur d'amortissement demandé, en déduire l'iso-gain tangente dans les abaques de Nichols)*

Cette question n'est pas facile. N'y consacrez pas trop de temps et continuez le problème avec la marge donnée même si vous ne voyez pas pourquoi on l'a choisie.

Question 3 : *Synthétisez un correcteur qui réalise la marge de phase $M_\varphi = 60^\circ$. Vous préciserez*

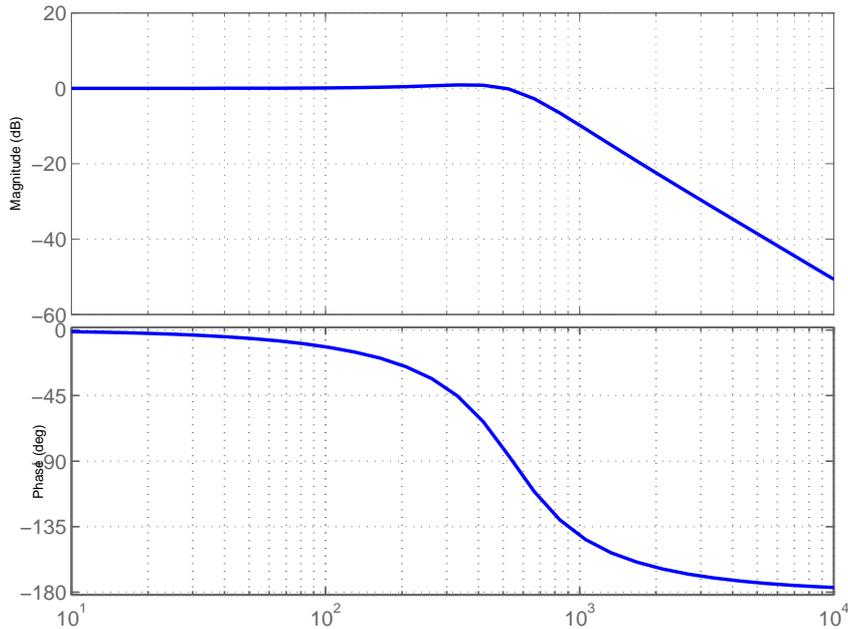


Figure 1.5 – Diagramme de Bode de la boucle interne fermée

en les justifiant les éventuels choix que vous serez amené à faire. (On admet qu'un bon réglage pour ξ permettra aussi de respecter la spécification en ω_n)

La solution n'est pas unique. On vous demande la méthode générale de synthèse ainsi que l'ordre de grandeurs des approximations à faire. Une synthèse précise nécessite des moyens de simulation.

Question 4 :

La figure 1.5 représente le diagramme de Bode de la boucle interne après correction.

La consigne de gîte ϕ_c est donnée au manche par le pilote.

Comparez l'ordre de grandeur de la fréquence des ordres du pilote et de la fréquence de coupure de la boucle interne corrigée. Vu du pilote, comment se comporte l'asservissement en position de la gouverne de gauchissement ? Justifiez pourquoi on va pouvoir négliger dans la suite du problème la dynamique de la servo-commande corrigée.

1.2 Etude du système complet

Les conclusions de la question 4 conduisent à considérer désormais que la servo-commande asservit parfaitement le braquage δ_l de la gouverne de gauchissement à la consigne de braquage délivrée par le correcteur de la boucle externe.

L'avion subit des perturbations atmosphériques qui peuvent se traduire par une perturbation de braquage $\Delta\delta_l$ de la gouverne.

Le braquage effectif δ_l de la gouverne de gauchissement appliqué à l'avion sera donc considéré comme la somme de la consigne et de la perturbation.

La mesure de l'angle de gîte ϕ par le gyroscope est supposée parfaite.

1.2. Etude du système complet

On donne la fonction de transfert modélisant l'avion : $\frac{\phi(p)}{\delta_l(p)} = \frac{K_a}{p(1 + \tau_a p)}$ avec $K_a = 70$ et $\tau_a = 0,2s$

On note la fonction de transfert du correcteur de la boucle externe $C_e(p)$

Question 5 : Modifiez le schéma fonctionnel du système complet tenant compte des résultats de l'étude de la boucle interne et de l'existence de perturbations.

Question 6 : Tracez le diagramme de Black asymptotique de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $\frac{\phi}{\delta_l}$ (On peut au préalable tracer le diagramme de Bode). Donnez sans calcul la marge de gain.

Question 7 : En l'absence de perturbations, pour n'importe quel type de correcteur $C_e(p)$, que vaut en régime l'erreur d'angle de gîte pour un échelon de consigne ?

Question 8 : En l'absence de consigne, pour un correcteur $C_e(p) = K$, que vaut en régime l'erreur d'angle de gîte pour un échelon de perturbations ?

Question 9 : On souhaite obtenir pour la boucle fermée corrigée les spécifications suivantes :

- Marge de phase d'environ 45°
- Erreur nulle en régime permanent pour une perturbation en échelon

Quel correcteur proposez-vous ?

Question 10 : A l'aide du tableau 1.1, proposez en le justifiant un réglage pour ce correcteur.

ω (rad/s)	1	5	10	18,5	50
$G_{dB}(\omega)$	36,1	20	9,7	0	-17
$\varphi(\omega)$ (deg)	-100	-135	-153	-165	-174

Tableau 1.1 – Valeurs de la fonction de transfert $\frac{\phi}{\delta_l}$

Contrôle de la trajectoire d'un avion

Modèle

On cherche à établir le modèle de la trajectoire d'un avion qui vole à vitesse constante V_0 et qui doit rejoindre un couloir aérien, ce problème est illustré sur 2.1. On note :

- δ_a : la commande de braquage des ailerons (radians),
- ϕ : l'angle de gîte (radians),
- ψ : le cap (radians),
- y : la distance de l'avion au couloir aérien qu'il doit emprunter (mètres),
- g : l'accélération de pesanteur $g = 10m.s^{-2}$,
- Γ : des perturbations qui affectent les positions des ailerons (pratiquement ce peut être des vibrations).

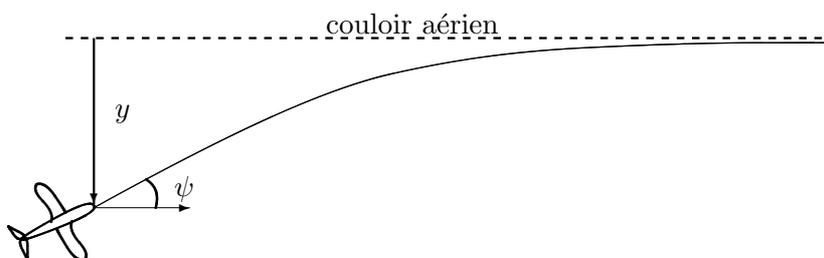


Figure 2.1 – La trajectoire

Equations du modèle

L'angle de gîte ϕ est commandé en braquant les ailerons δ_a . On note s la variable de Laplace ; d'autre part, le modèle qui lie $\delta_a(s)$ à $\phi(s)$ est donné par la fonction de transfert :

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{100}{0,1s(s+1)} \quad (2.1)$$

Les équations relatives au mouvement de l'avion s'écrivent :

$$\dot{\psi}(t) = V_0\phi(t) \quad (2.2)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{g}{V_0}\psi(t) \quad (2.3)$$

Le pilote automatique étudié et représenté sur la figure 2.2 réalise la tenue de trajectoire de l'avion. Il est constitué de deux boucles.

1. Une boucle interne dite **petite boucle** qui assure le contrôle de l'angle de gîte.
2. Une boucle externe dite **grande boucle** qui assure le maintien de la trajectoire de l'avion le long du couloir aérien.

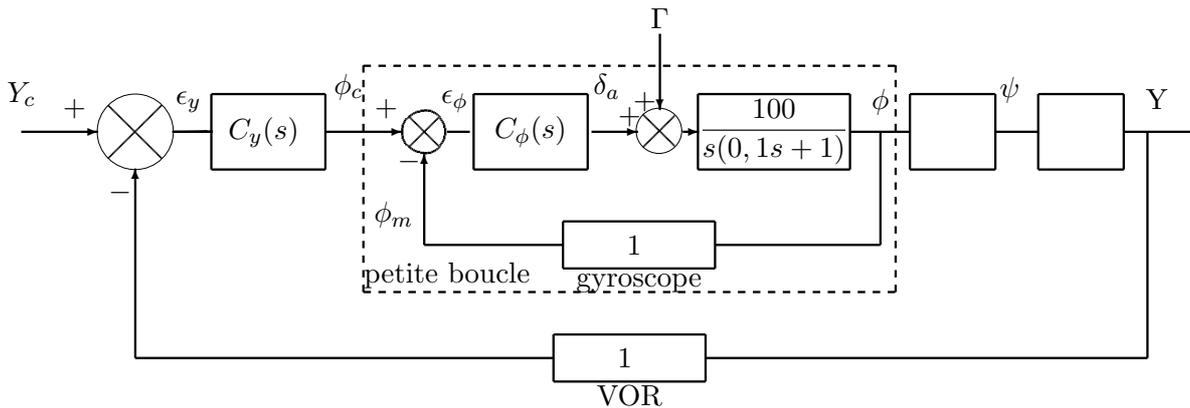


Figure 2.2 – Les boucles d'asservissement

2.1 La petite boucle

Question 1 : Calculez la fonction de transfert en boucle ouverte de la petite boucle, soit $F(s) = \frac{\phi_m(s)}{\epsilon_\phi(s)}$ tandis que la perturbation $\Gamma(s) = 0$.

Question 2 : Calculez la fonction de transfert en boucle fermée de la petite boucle, soit $G(s) = \frac{\phi(s)}{\phi_c(s)}$ tandis que la perturbation $\Gamma(s) = 0$.

Question 3 : Le correcteur $C_\phi(s)$ est un gain noté k_ϕ . Calculez ce gain pour que le facteur d'amortissement de la petite boucle soit égal à 0,4.

2.1. La petite boucle

Question 4 : Mettez $F(s)$ sous forme pôles-zéros et ébauchez le lieu d'Evans ou lieu des pôles de la boucle fermée de la petite boucle (le correcteur $C_\phi(s)$ est toujours un gain noté $k_\phi \in [0, +\infty[$). Indiquez sur ce lieu le réglage correspondant au facteur d'amortissement égal à 0,4. Précisez comment vous lisez la pulsation propre non-amortie ω_n . Que vaut-elle ?

Question 5 : Pour le réglage opéré à la question 3, tracez l'angle de gîte $\phi(t)$ en réponse à un échelon de consigne de gîte $\phi_c(t)$ d'amplitude 0,17rad (0,17rad valent 10°). Indiquez les points remarquables de cette réponse.

Question 6 : La figure 3 représente le lieu de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte de la petite boucle tracé pour $k_\phi = 1$. Sur cette même figure que vous joindrez à votre copie, représentez le lieu de Black corrigé pour la valeur de k_ϕ obtenue à la question 3. En déduire les valeurs de la marge de phase et la marge de gain du système ainsi corrigé.

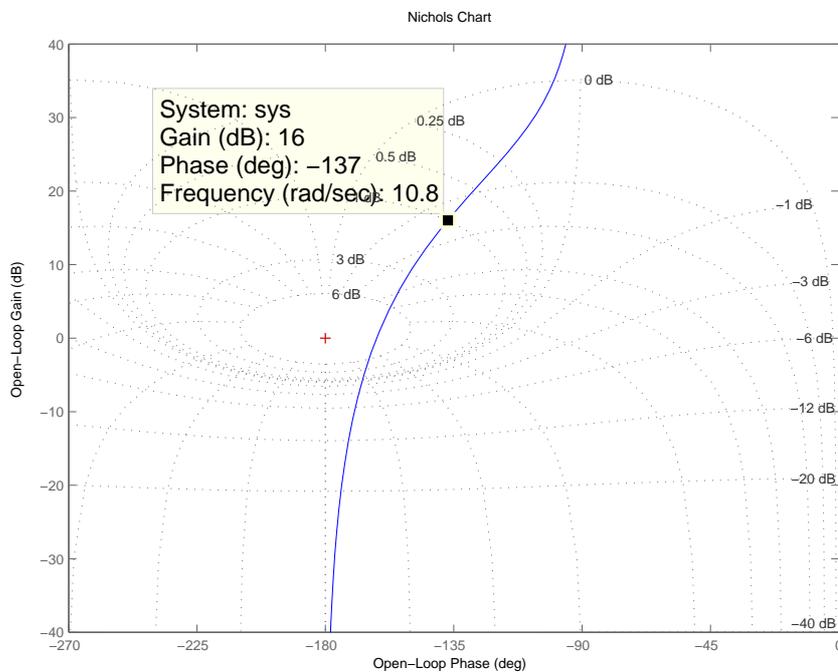


Figure 2.3 – Le lieu de Black de la boucle ouverte de la petite boucle pour $k_\phi = 1$

Tenue de la petite boucle aux perturbations

La position des ailerons est sujette à des oscillations (problème effectivement rencontré sur l'A380). A ce titre, on souhaite évaluer la capacité de la petite boucle à rejeter ces perturbations.

Question 7 : Calculez $H(j\omega) = \frac{\phi(j\omega)}{\Gamma(j\omega)}$

Question 8 : Toujours pour un correcteur de gain k_ϕ , ébauchez le diagramme de Bode du gain de $H(j\omega)$ et concluez quant à l'aptitude de la petite boucle à rejeter les perturbations de nature sinusoïdale.

Question 9 : On admet que ces perturbations sont très lentement variables. Justifiez pourquoi un correcteur proportionnel-intégral de fonction de transfert $C_\phi(s) = k_\phi \frac{Ts + 1}{Ts}$ peut contribuer au rejet de ces perturbations. En utilisant le lieu de Black tracé à la question 6, proposez une valeur pour T .

Question 10 : Ebauchez sur ce même lieu de Black, le lieu de la FTBO du système corrigé par le correcteur proportionnel-intégral.

2.2 La grande boucle

Dans cette partie, la petite boucle (supposée beaucoup plus rapide que la grande boucle) est vue par la grande boucle comme un gain unitaire et on considère les perturbations Γ nulles.

Question 11 : Pourquoi a-t-on choisi un gain unitaire pour la petite boucle ?

Question 12 : Etablissez les expressions de $Y(s)$ et celle de $\psi(s)$. Complétez le schéma de la figure 2.

Question 13 : On suppose pour l'instant $C_y(s) = 1$. Etablissez l'expression de la FTBO de la grande boucle soit $M(s) = \frac{Y(s)}{\epsilon_y(s)}$.

Question 14 : Sur votre copie, tracez le lieu de Black de $M(j\omega)$ et portez sur ce lieu la pulsation pour laquelle le gain est nul. Soit ω_{0dB} cette pulsation.

Question 15 : Proposez un correcteur de fonction de transfert $C_y(s)$ qui confère à la grande boucle une marge de phase supérieure ou égale à 45° , plusieurs solutions sont envisageables. Ebauchez le lieu de Black de la FTBO de la grande boucle ainsi corrigée.

On suppose qu'un correcteur proportionnel-dérivée dont les paramètres ont été judicieusement choisis permet de réaliser une correction satisfaisante. On admet (ce qui ne correspond pas aux résultats que vous pourriez trouver mais qui permet de mener une étude sans avoir à faire de calcul) que ce correcteur a pour fonction de transfert $C_y(s) = \frac{\phi_c(s)}{\epsilon_y(s)} = 1 + s$. Sur la figure 4, on a représenté les chronogrammes de la trajectoire de l'avion partant d'une position initiale de 100m, la consigne y_c est nulle .

Question 16 : Tracez l'allure de $\phi_c(t)$. Pour ce faire, vous tracerez l'allure de $\epsilon_y(t)$ et de sa dérivée. Pour chacun de ces deux signaux dites qualitativement son effet sur le système (imaginez vous à bord d'un avion ou d'un planeur devant réaliser la manœuvre étudiée).

Présentation

L'objet de ce problème est l'étude d'un système constitué d'un missile et d'une cible. Dans un premier temps, vous étudierez les performances de ce système en boucle ouverte et l'impossibilité pour le missile d'atteindre la cible. Dans une seconde partie, vous étudierez une loi de commande par retour d'état visant à guider le missile vers la cible. Dans la troisième partie, vous mettrez en œuvre un observateur, et cela afin de tenir compte des contre-mesures générées par la cible. L'objectif étant de fournir au missile des informations pertinentes quant à sa position et sa vitesse par rapport à celle de la cible.

Notations

- M désigne le missile,
- T désigne la cible,
- x_1 la position relative cible/missile dans la direction y ,
- x_2 la position relative cible/missile dans la direction z ,
- x_3 la vitesse relative cible/missile dans la direction y ,
- x_4 la vitesse relative cible/missile dans la direction z .

On fait l'hypothèse que l'engagement se situe dans le plan et que les accélérations de la cible a_{Ty} et a_{Tz} selon les axes y et z sont nulles (la cible se déplace à vitesse constante). De plus on définit le vecteur des commandes $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T$ avec $u_1 = -a_{My}$ et $u_2 = -a_{Mz}$; de plus, ces commandes ne sont pas contraintes.

3.1 Modélisation du système missile-cible

Modélisation du système missile-cible

Question 1 : On adopte pour vecteur d'état $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$, pour vecteur des com-

mandes $\tilde{U} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T$. On suppose que tout le vecteur d'état est mesuré. Dans ces conditions, écrivez les équations d'état et d'observation de ce système.

Question 2 : Citer un ou des capteurs embarqués sur l'avion qui tire le missile ou sur le missile qui réaliseraient la mesure du vecteur d'état (question hors barème).

Pour simplifier l'étude, on découple les équations qui décrivent le système selon les axes y et z .

Question 3 : Ecrivez les équations d'état et d'observation qui rendent compte de la dynamique du système cible-missile selon la direction y , on notera X , U et Y les vecteurs d'état, de commande et de mesure réduits. Désormais vous ne travaillerez plus que sur ces équations dans toute la suite du problème.

Question 4 : Calculez les valeurs propres de la matrice d'état. Que représentent-elles ? Comment interprétez-vous le comportement dynamique du système missile-cible à l'aune de ces valeurs propres ?

Pour étudier le comportement du système missile-cible selon la direction y , il faut pouvoir intégrer l'équation d'état établie à la question 3.

Question 5 : Intégrez l'équation d'état en supposant la commande u_1 constante et égale à 1000N.kg^{-1} , la distance initiale dans la direction y entre le missile et la cible égale à 3000m et la vitesse relative initiale égale à 200m.s^{-1} . Représentez les chronogrammes de $x_1(t)$ et $x_3(t)$ et concluez sur l'aptitude du missile commandé en boucle ouverte à atteindre la cible.

Question 6 : Le comportement du missile tel qu'il est commandé n'est visiblement pas satisfaisant. Cependant, en préalable à la mise en œuvre d'une loi de commande par retour d'état, certaines conditions doivent être vérifiées, rappelez-les et démontrez-les si cela est nécessaire.

Question 7 : Représentez la structure d'une commande par retour d'état de la forme $U = -KX$ et expliquez qualitativement comment cette dernière serait réalisée dans le cas d'un système constitué d'un missile et d'une cible.

Question 8 : Calculez les gains de la matrice de contre-réaction K de sorte que le système missile-cible se comporte comme un système du second ordre de facteur d'amortissement unitaire et tel que le temps de réponse à 5% soit inférieur ou égal à 3s .

3.1. Modélisation du système missile-cible

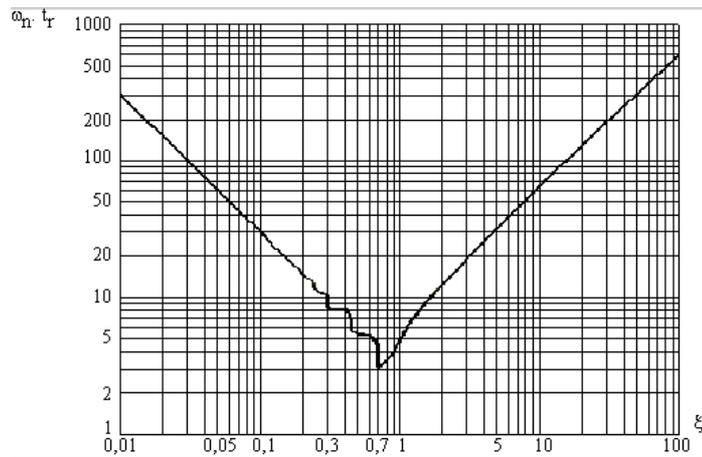


Figure 3.1 – Abaque $\omega_n(t_{r5\%})$

Question 9 : *Quels effets physiques règle-t-on avec les gains de cette matrice de contre-réaction ?*

Question 10 : *Les conditions initiales restant inchangées, ébauchez l'allure du chronogramme de $x_1(t)$. Aucun calcul n'est demandé pour effectuer ce tracé. Tenez toutefois compte du fait que, muni de sa commande, le système missile-cible est stable.*

Question 11 : *Calculez la valeur numérique de la commande u_1 ($-a_{My}$) à l'instant initial. Qu'est-ce qui vous semble irréaliste dans une telle loi de commande ? Quel phénomène négligé dans ce problème limiterait les performances du missile ?*

Les contre-mesures de la cible sont à l'origine d'une erreur systématique ν constante sur la mesure de la position relative cible/missile :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (3.1)$$

$$Y = CX + \nu \quad (3.2)$$

On conçoit bien que si la mesure de la position est entâchée d'une erreur, le missile n'atteindra jamais la cible. On envisage donc de munir le missile d'un observateur capable d'estimer l'état X et tel que l'erreur d'estimation $\varepsilon = X - \hat{X}$ soit découplée de l'erreur systématique ν . \hat{X} désigne l'état estimé. Cet observateur n'a pas été étudié en cours, cependant, les questions sont posées de sorte que vous puissiez l'étudier sans difficultés majeures.

On note Z le vecteur d'état de l'observateur et \hat{X} le vecteur d'état estimé par cet observateur. Une estimation correcte se traduit par $\varepsilon \rightarrow 0$, et cela même en présence de ν . Les équations d'un tel observateur sont :

$$\dot{Z} = MZ + NU + PY \quad (3.3)$$

$$\hat{X} = Z - LY \quad (3.4)$$

Question 12 : *Ecrivez l'expression de l'erreur d'estimation ε , vous poserez $F = I + LC$ où I est la matrice identité.*

Question 13 : *En déduire l'expression de la dérivée temporelle de l'erreur d'estimation $\dot{\varepsilon}$, toutes les matrices sont constantes.*

Question 14 : *Montrez que $\dot{\varepsilon} = f(\varepsilon, X, U, \nu, \dot{\nu})$ (il faut faire disparaître Z).*

Question 15 : *Quelles conditions doivent vérifier les matrices A, B, C, M, N, F, P pour que ε ne dépende ni de X , ni de U , ni de ν . On rappelle à cet effet que ν est une erreur systématique constante.*

Question 16 : *Ecrivez l'expression de $\varepsilon(t)$ qui ne doit pas dépendre de ν . A quelle condition sur M les erreurs d'estimation convergent-elles vers 0 ?*